17.5
94

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL

LEÇONS
SUR LES
FONCTIONS UNIFORMES
A POINT SINGULIER ESSENTIEL ISOLÉ

PROFESSÉES AU COLLÈGE DE FRANCE

PAR

Gaston JULIA
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

RÉDIGÉES PAR

P. FLAMANT
AGRÉGÉ-PRÉPARATEUR A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
55, Quai des Grands-Augustins, 55
—
1924

LEÇONS

SUR LES

FONCTIONS UNIFORMES

A POINT SINGULIER ESSENTIEL ISOLÉ

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie

55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, PARIS (6e)

Collection de monographies sur la Théorie des fonctions, publiée sous la direction d'Émile Borel, Membre de l'Institut. Volumes in-8 (25-16) se vendant séparément.

Leçons sur la théorie des fonctions (*Éléments et principes de la théorie des ensembles; applications à la théorie des fonctions*), par Émile Borel, 2e édition, 1914 ..... 15 fr.

Leçons sur les fonctions entières, par Émile Borel, 2e édit., 1921. 20 fr.

Leçons sur les séries divergentes, par E. Borel; 1901 ..... 9 fr.

Leçons sur les séries à termes positifs, par E. Borel; 1902 (réd. par *R. d'Adhémar*) ..... 7 fr.

Leçons sur les fonctions méromorphes, par E. Borel; 1903 (réd. par *L. Zoretti*) ..... 7 fr.

Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, par H. Lebesgue; 1904 ..... 7 fr.

Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes, par E. Borel; 1905 (réd. par *M. Fréchet*, Notes de *P. Painlevé* et *H. Lebesgue*) ..... 9 fr.

Leçons sur les fonctions discontinues, professées au Collège de France, par René Baire, rédigées par *A. Denjoy*; 1905 ..... 7 fr.

Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, par Ernst Lindelöf; 1905 ..... 7 fr.

Leçons sur les séries trigonométriques, professées au Collège de France, par Henri Lebesgue; 1906 ..... 7 fr.

Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles de premier ordre, professées au Collège de France par Pierre Boutroux, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier; avec une *Note* de Paul Painlevé; 1908 ..... 13 fr.

Principes de la théorie des fonctions entières de genre infini, par Otto Blumenthal; 1910 ..... 11 fr.

Leçons sur la théorie de la croissance, professées à la Fle des Sciences de Paris, par É. Borel, recueillies et rédigées par *A. Denjoy*; 1910 .... 11 fr.

Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe, par Paul Montel; 1910 ..... 7 fr.

Leçons sur le prolongement analytique, professées au Collège de France, par Ludovic Zoretti; 1911 ..... 7 fr. 50

Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles, professées à la Fle des Sciences de Rome en 1910, par Vito Volterra et publiées par *M. Tomassetti* et *E.-S. Zarlatti*; 1913 ... 11 fr.

Leçons sur les singularités des fonctions analytiques, professées à l'Université de Budapest, par Paul Dienes; 1913 ..... 11 fr.

Leçons sur les fonctions de lignes, professées à la Sorbonne en 1911, par Vito Volterra, recueillies et rédigées, par *J. Peres*; 1913 ... 15 fr.

Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues; par F. Riesz; 1913 ..... 13 fr.

Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire. Leçons professées au Collège de France, par C. de la Vallée Poussin, Professeur à l'Université de Louvain, Membre correspondant de l'Institut de France; 1916 ..... 14 fr.

Leçons sur les méthodes de Sturm dans la théorie des équations différentielles linéaires et leurs développements modernes, professées à la Sorbonne en 1913-1914, par Maxime Bôcher, recueillies et rédigées par *Gaston Julia*; 1917 ..... 10 fr.

Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe, par Émile Borel, rédigées par *G. Julia*; 1917 ..... 15 fr.

Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, par C. de la Vallée Poussin; 1919 ..... 16 fr.

Leçons sur les fonctions automorphes, par G. Giraud; 1920 .... 13 fr.

Leçons d'Analyse fonctionnelle, par P. Lévy; préface de *J. Hadamard*, 1922 ..... 35 fr.

Méthodes et problèmes de théorie des fonctions; par Emile Borel, 1922 ..... 12 fr.

68464 Paris. — Imp. Gauthier-Villars et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL

LEÇONS
SUR LES
FONCTIONS UNIFORMES
A POINT SINGULIER ESSENTIEL ISOLÉ

PROFESSÉES AU COLLÈGE DE FRANCE

PAR

Gaston JULIA
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

RÉDIGÉES PAR

P. FLAMANT
AGRÉGÉ-PRÉPARATEUR A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

UNIVERSITY OF ARIZONA
LIBRARY

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés
pour tous pays.

517.5
J94

PRÉFACE.

Le présent Ouvrage est issu des leçons professées au Collège de France en 1920 par l'auteur, alors chargé du cours de la fondation Peccot. La rédaction en est due à M. Paul Flamant, alors agrégé-préparateur à l'École Normale supérieure : il y apporta tout ses soins et je l'en remercie bien cordialement. Pour se conformer à l'esprit de la collection dont fait partie cet Ouvrage, on a voulu que la lecture en fût possible à quiconque possède une connaissance suffisante des Traités classiques d'Analyse. On a rappelé ou exposé dans un Chapitre préliminaire quelques notions spéciales, représentation conforme et fonction modulaire, dont on devait ensuite faire grand usage.

Dans l'étude des valeurs que prend une fonction uniforme autour d'un point singulier essentiel isolé, les théorèmes de M. Picard marquent, en 1879, une étape essentielle. Ils furent obtenus, comme on le sait, au moyen de la fonction modulaire, dont l'étude constitue un Chapitre attrayant de la théorie des fonctions elliptiques. Une quinzaine d'années plus tard, M. Borel donna de ces théorèmes une démonstration « élémentaire » indépendante de la fonction modulaire.

Dès lors, deux voies s'ouvraient selon que la fonction modulaire ou la théorie élémentaire des fonctions fournirait le moyen analytique d'investigation ou d'exposition. M. Borel a consacré plusieurs volumes de la collection à exposer le développement et les applications des principes qui se trouvent en germe dans sa première Note des *Comptes rendus* sur le sujet. On s'est ici systématiquement servi de la fonction modulaire, et pour l'exposition des pro-

61/62-R

priétés de cette fonction qu'on devait utiliser, on a choisi le mode adopté par M. Lindelöf dans sa remarquable communication du Congrès de Stockholm : n'est-ce point le plus rapide, celui qui exige le moins de connaissances spéciales, et aussi celui qui met le plus simplement en évidence les propriétés de la fonction ?

Le Chapitre II développe les deux théorèmes de M. Picard et les extensions apportées par MM. Landau, Carathéodory, Schottky. Dans ces extensions, la fonction modulaire joue un rôle qui n'est pas seulement d'exposition : ceci résulte des recherches de M. Carathéodory, et confirme ce qu'en 1889, M. Picard disait déjà à propos de son premier théorème sur les fonctions entières : « il est dans la nature des choses, semble-t-il, de s'adresser, pour le démontrer, à une fonction possédant précisément la propriété qu'on veut démontrer ne pouvoir appartenir aux fonctions entières ».

D'autre part, l'étude de la fonction dans un cercle entourant le point singulier essentiel peut se ramener à l'étude d'une suite de fonctions dans une couronne circulaire entourant ce point, chacune des fonctions étant *méromorphe* dans la couronne. De ce point de vue, on est conduit, avec M. Montel, à une nouvelle démonstration des théorèmes de M. Picard : le Chapitre III expose les propriétés essentielles des familles normales de fonctions ; la fonction modulaire y joue un rôle essentiel pour l'établissement d'un critérium donné en 1911 par MM. Landau et Carathéodory sous forme de critérium de convergence, mais dont la transformation en critérium de familles normales permet de redémontrer simplement les théorèmes du Chapitre II.

Si, au lieu d'étudier la fonction dans un cercle entourant le point singulier essentiel, on l'étudie dans une aire dont le contour passe par ce point, les résultats obtenus, principalement par MM. Lindelöf et Iversen, offrent souvent une parenté remarquable avec les théorèmes de M. Picard (*voir* Chap. IV). Il est vrai qu'on ne les obtient qu'au prix d'hypothèses supplémentaires concernant l'allure de la fonction dans l'aire ou sur son contour. Mais il est possible de s'affranchir de ces hypothèses et d'obtenir des énoncés,

analogues à celui du théorème général de M. Picard, s'appliquant dans des domaines pour lesquels le point singulier essentiel n'est plus qu'un *point frontière* ou un *point limite* au lieu d'être un point *intérieur*. A ces recherches, contribution personnelle de l'auteur à l'étude qui fait l'objet de ses leçons, sont consacrés les Chapitres V, VI, VII. Dans cette voie il y a lieu d'espérer de nouveaux progrès : puisse ce petit livre contribuer à les susciter.

A M. Borel qui accueillit ce livre dans la collection dont il dirige la publication, et à la maison Gauthier-Villars et C^ie^ qui en assura l'édition, j'adresse ici mes remerciements.

GASTON JULIA.

Août 1923.

LEÇONS

SUR LES

FONCTIONS UNIFORMES

A POINT SINGULIER ESSENTIEL ISOLÉ

CHAPITRE I.

PRÉLIMINAIRES.

I. — PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FONCTIONS ANALYTIQUES.

1. **Pôle. Point singulier essentiel.** — Étant donnée une fonction analytique uniforme, on appelle *point régulier* tout point autour duquel on peut tracer un cercle assez petit pour que la fonction y soit holomorphe. Il résulte immédiatement de l'intégrale de Cauchy que la fonction est développable en série de Taylor au voisinage du point.

Tout point qui n'est pas régulier est appelé *point singulier*. Les points singuliers les plus simples, les seuls que possèdent les fonctions rationnelles, sont les pôles. Un point a est *pôle* pour une fonction $f(z)$ s'il existe un cercle de centre a dans lequel elle peut être représentée par

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m},$$

m étant un entier positif et $\varphi(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle en question $[\varphi(a) \neq 0]$; m s'appelle l'ordre du pôle.

On peut encore dire qu'un point est un pôle s'il est singulier pour $f(z)$ sans l'être pour $\frac{1}{f(z)}$.

Les pôles d'une fonction analytique sont isolés.

Ce ne sont pas les seuls points singuliers isolés. En effet, soit a un point singulier isolé de $f(z)$. Il existe un cercle C de centre a dans lequel il n'existe aucun autre point singulier. Soit c un autre cercle de centre a intérieur à C; $f(z)$ étant holomorphe dans la couronne (C, c), on peut lui appliquer l'intégrale de Cauchy :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(z)\,dz}{z-x} - \frac{1}{2\pi i}\int_{c}\frac{f(z)\,dz}{z-x}$$

(les deux intégrales étant prises dans le sens positif), d'où l'on déduit le développement en série de Laurent :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} A_n(x-a)^n + \sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{B_n}{(x-a)^n},$$

qu'on peut écrire

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n(x-a)^n.$$

Si le point a est un pôle d'ordre m, les coefficients des puissances inférieures à $-m$ sont nuls, et réciproquement.

Si les coefficients des puissances négatives ne sont pas nuls à partir d'un certain rang, le point est appelé *point singulier essentiel isolé*.

Le même nom s'applique aussi aux points singuliers au voisinage desquels il n'y a comme autres singularités que des pôles. Autrement dit, un point a est appelé point singulier essentiel isolé s'il existe un cercle C de centre a dans lequel $f(z)$ n'a pour singularités, en dehors de a, qu'une infinité de pôles ayant a pour seul point limite; si l'on considère un cercle c intérieur et concentrique à C, $f(z)$ sera méromorphe dans la couronne, au lieu d'être holomorphe comme dans le premier cas.

Ces deux cas diffèrent d'ailleurs moins qu'il ne semble tout d'abord. On peut passer souvent de l'un à l'autre par une transformation homographique sur la fonction, transformation qui fait apparaître ou disparaître des pôles.

Soit a un point singulier essentiel limite de pôles pour $f(z)$. Supposons qu'il existe un nombre b tel que l'équation

$$f(z) - b = 0$$

n'ait pas une infinité de racines au voisinage de a, la fonction

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - b}$$

admettra a pour point singulier essentiel isolé de tout autre point singulier. En effet, en un point où $f(z)$ est régulière et n'a pas la valeur b, $f(z) - b$ est régulière et non nulle, et $\varphi(z)$ aussi; en un point où $f(z)$ est régulière et égale à b, $\varphi(z)$ a un pôle; un pôle de $f(z)$ est pôle de $f(z) - b$, c'est donc un point régulier et un zéro pour $\varphi(z)$; les réciproques sont vraies. Il en résulte qu'un point qui est régulier ou pôle pour l'une des fonctions est régulier ou pôle pour l'autre; donc tout point essentiel pour l'une l'est aussi pour l'autre. Les pôles de $\varphi(z)$ étant les racines de

$$f(z) - b = 0,$$

ils n'admettent pas a pour point limite (1).

Les dénominations précédentes peuvent s'appliquer au point à l'infini. Pour définir la nature de ce dernier point pour une fonction $f(z)$, il suffit de faire la transformation

$$z = \frac{1}{z'},$$

et de considérer la nature du point O pour la fonction

$$f\left(\frac{1}{z'}\right) = f_1(z').$$

Il revient au même d'appliquer les définitions précédemment données en y remplaçant $z - a$ par $\frac{1}{z}$, et l'intérieur du cercle C de centre a et de rayon suffisamment petit par l'extérieur d'un cercle ayant pour centre l'origine et de rayon suffisamment grand.

Pour un polynome de degré m, le point à l'infini est un pôle d'ordre m. Pour une fonction entière, le point à l'infini est un point singulier essentiel isolé, autour duquel il n'y a pas de pôles. Pour une fonction méromorphe dans tout domaine fini, le point à l'infini est un point essentiel isolé, limite de pôles.

---

(1) Nous laissons hors de notre étude les points singuliers essentiels qui ne sont pas isolés. Il suffit de savoir que nous n'avons pas épuisé toutes les singularités possibles pour une fonction uniforme.

2. **Allure de la fonction au voisinage des points singuliers.** — Au voisinage d'un pôle, la fonction augmente indéfiniment. Aussi, nous dirons désormais que, au pôle, la fonction prend la valeur ∞.

Au voisinage d'un point singulier essentiel isolé, la fonction prend des valeurs aussi grandes qu'on veut en module (¹). C'est évident si le point singulier essentiel a est limite de pôles : aussi près qu'on veut du point a, il y a un pôle au voisinage duquel la fonction augmente indéfiniment. Supposons maintenant que a soit isolé de tout pôle; alors nous savons qu'elle est représentable par une série de Laurent dans une couronne circulaire (C, c) de centre a, C étant choisi de façon à ne contenir aucun pôle et c étant arbitrairement petit. D'après la façon même dont ce développement a été obtenu, les coefficients des puissances négatives ont pour expression

$$A_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_c (z-a)^{n-1} f(z)\, dz.$$

Soit M un nombre positif arbitraire; si, au voisinage de a, $|f(z)|$ restait inférieur à M, en prenant le cercle c dans ce voisinage, on aurait (en désignant par r le rayon de c)

$$|A_{-n}| < \frac{1}{2\pi} \cdot r^{n-1} \cdot M \cdot 2\pi r = M r^n.$$

Comme r est arbitrairement petit, on en conclurait que A_{-n} est nul. La série de Laurent se réduirait à une série de Taylor et $f(z)$ serait régulière en a. Il faut donc que l'on ait

$$|f(z)| > M$$

en des points aussi rapprochés qu'on veut de a; et ceci, quel que soit M.

(¹) Le théorème de Liouville : *Toute fonction entière dont le module est borné se réduit à une constante*, est un cas particulier de cette proposition : il suffit de l'appliquer à une fonction entière transcendante (ne se réduisant pas à un polynome pour que le point à l'infini soit bien un point essentiel) au voisinage du point à l'infini pour en conclure qu'une telle fonction prend des valeurs dont le module est supérieur à tout nombre donné. Comme la même propriété est vraie pour un polynome, une constante seule peut réaliser l'hypothèse du module borné.

Cette proposition doit être regardée comme la première propriété signalée d'une fonction au voisinage d'un point singulier essentiel.

3. Cette propriété se généralise immédiatement et donne la suivante qui a été signalée par Weierstrass (¹).

Au voisinage d'un point singulier essentiel isolé a, la fonction $f(z)$ s'approche autant qu'on veut de toute valeur arbitraire b.

En effet, ou bien l'équation

$$f(z) - b = 0$$

a une infinité de racines au voisinage de a; et alors, aussi près qu'on veut de a, $f(z)$ prend effectivement la valeur b; ou bien l'équation n'a qu'un nombre fini de racines autour de a (elle n'en a pas dans un cercle suffisamment petit); dans ce cas, la fonction

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - b}$$

admet a pour point singulier essentiel autour duquel il n'y a pas de pôle; d'après la première propriété, on a

$$|\varphi(z)| > \frac{1}{\varepsilon}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad |f(z) - b| < \varepsilon$$

en des points aussi voisins qu'on veut de a, ε étant arbitraire,

C. Q. F. D.

M. Picard a montré que c'est la première hypothèse qui est réalisée en général, la seconde ne pouvant se présenter que pour deux valeurs au maximum de la constante b. Son théorème sera fondamental pour nous, le but des présentes leçons étant d'étudier la distribution des racines des équations

$$f(z) - b = 0$$

au voisinage d'un point singulier essentiel isolé a.

4. Revenons maintenant à la première propriété. On peut encore l'énoncer en disant que, pour une fonction $f(z)$, les deux faits, d'avoir a pour point singulier essentiel, et d'être bornée en module au voisinage de a, sont incompatibles. Supposons maintenant que la fonction $f(z)$ n'ait pas de pôle dans ce voisinage, c'est-à-dire que

---

(¹) K. Weierstrass, *Mémoire sur les fonctions uniformes d'une variable* (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1876).

dans un cercle de centre a, elle soit holomorphe sauf peut-être en a; si elle reste bornée en module sur une infinité de circonférences (1) de centre a et tendant vers ce point, on peut affirmer qu'elle est régulière en a. En effet, dans chaque couronne comprise entre deux circonférences, la fonction est holomorphe; c'est sur le contour de ce domaine que le module atteint son maximum; la borne connue pour les circonférences est donc valable dans les couronnes, et par suite dans tout le voisinage de a.

5. Ce mode de raisonnement ne s'appliquerait pas si le point a était limite de pôles, et le fait ne serait d'ailleurs pas vrai. Voici un exemple d'une fonction dont le module est borné sur une infinité de cercles passant entre les pôles. Pour le former, nous avons besoin de nous appuyer sur le lemme suivant : Soient des fonctions $\varphi_p(x)$, holomorphes dans une aire D et satisfaisant dans cette aire à des inégalités

$$|\varphi_p(x)| < K_p,$$

la série ΣK_p étant convergente, la série $\Sigma\varphi_p(x) = \varphi(x)$ représente une fonction holomorphe dans D. Nous ne le démontrerons pas ici, car c'est un cas particulier de propositions qui seront étudiées en détail au Chapitre III.

Considérons maintenant la fonction

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{x - n},$$

où les A_n sont tels que la série $\Sigma|A_n|$ soit convergente.

Supposons x intérieur à un cercle D de rayon R; laissons de côté les premiers termes de la série, dont le pôle est à l'intérieur du cercle; chacun des autres est une fonction holomorphe dans D,

---

(1) Naturellement, il faut entendre par là qu'il existe un nombre M tel que l'on ait

$$|f(z)| < M$$

lorsque z se trouve sur l'une quelconque des circonférences. La fonction est toujours bornée en module sur chacune d'elles, mais les bornes relatives aux circonférences successives augmentent indéfiniment quand on tend vers le point singulier essentiel.

et l'on a

$$\left|\frac{A_n}{x-n}\right| < \frac{|A_n|}{n-R} < K|A_n|.$$

La somme considérée est donc une fonction holomorphe dans D; si nous ajoutons les termes, en nombre fini, laissés de côté, nous obtenons une fonction qui admet pour pôles ceux des points 1, 2, ..., n, ..., intérieurs à D. Ceci étant vrai quel que soit le cercle D, $\varphi(x)$ est une fonction méromorphe dans tout le plan, avec les pôles 1, 2, ..., n, ...

Considérons les cercles de rayon

$$R_p = p + \frac{1}{2},$$

x étant sur un tel cercle, on a

$$|x-p| > \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{|x-n|} < 2,$$

$$|\varphi(x)| < \sum\left|\frac{A_n}{x-n}\right| < 2\sum|A_n|,$$

$|\varphi(x)|$ est donc borné sur ces cercles.

En remplaçant x par $\frac{1}{z}$, on a la fonction

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n z}{1-nz}$$

qui admet les pôles $\frac{1}{n}$, l'origine pour point singulier essentiel, et qui a son module borné sur les cercles de rayon

$$\Gamma_p = \frac{1}{p+\frac{1}{2}}.$$

II. — REPRÉSENTATION CONFORME DES AIRES PLANES SIMPLEMENT CONNEXES.

6. **Définitions.** — Étant données deux fonctions réelles continues d'une variable t dans un intervalle fermé (a, b), le lieu des points du plan dont les coordonnées sont définies par ces deux fonctions

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

est appelé *une courbe de Jordan*. Si l'on a, à la fois,

$$x(a) = x(b),$$
$$y(a) = y(b),$$

la courbe est dite *fermée*.

On appelle *point double* tout point obtenu pour deux valeurs distinctes du paramètre, autres que a et b. Une courbe fermée, sans point double, est dite *simple*.

On démontre qu'une courbe simple de Jordan divise le plan en deux régions, l'une qui s'étend à l'infini et qu'on appelle *région extérieure* ($\mathcal{E}$), l'autre qui est tout entière à distance finie et qu'on appelle *région intérieure* ($\mathcal{I}$).

Une aire simplement connexe est une portion de plan limitée par un seul contour. Nous nous bornerons au cas où ce contour est une courbe simple de Jordan; l'aire ($\mathcal{I}$) est simplement connexe.

7. **Principe de la représentation conforme** (Riemann). — Considérons, dans le plan d'une variable complexe z l'aire ($\mathcal{I}$) intérieure à une courbe simple de Jordan C; et, dans le plan d'une autre variable Z, le cercle ($\mathcal{C}$) ayant pour centre l'origine et pour rayon l'unité. Il existe une fonction

$$Z = f(z),$$

holomorphe dans ($\mathcal{I}$) et qui établit une correspondance biunivoque entre les points z de l'aire ($\mathcal{I}$) et les points Z du cercle ($\mathcal{C}$).

Pour la déterminer, on peut se donner arbitrairement le point ω intérieur à ($\mathcal{I}$) qui devra correspondre au centre O de ($\mathcal{C}$); il faut alors imposer à $f(z)$, outre la condition d'holomorphie dans ($\mathcal{I}$), les deux conditions

$$f(\omega) = 0 \qquad \text{et} \qquad |f(\zeta)| = 1,$$

ζ étant un point courant de la courbe C. Cet ensemble de conditions, nécessaires et suffisantes, laisse subsister une arbitraire. Il est clair que si $f(z)$ est solution, $e^{i\theta} f(z)$ l'est aussi; c'est la solution générale. Le paramètre θ correspondant géométriquement à une rotation autour de O, la solution sera complètement déterminée en considérant une direction OD issue de O (par exemple

l'axe réel positif) et en se donnant arbitrairement la direction $\omega\delta$ issue de ω qui doit lui correspondre; ou encore en considérant un point Z de la circonférence et en se donnant arbitrairement le point ζ de la courbe C qui doit lui correspondre.

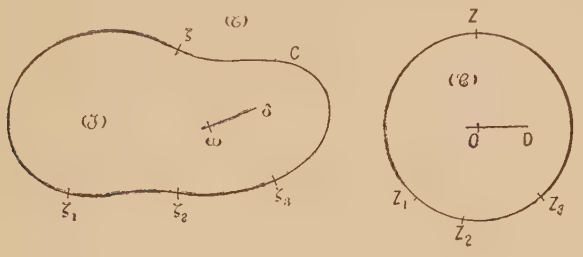

Fig. 1.

Riemann ne s'était occupé que de la correspondance entre les points intérieurs. Depuis, de nombreux travaux ont été faits sur la question, pour établir que la correspondance restait continue et biunivoque entre les contours, en considérant comme contour C une courbe de plus en plus générale.

On sait que la fonction homographique

$$Z' = \frac{aZ + b}{cZ + d}$$

transforme les circonférences et droites en circonférences et droites. On peut disposer des constantes qui y entrent pour amener trois points Z_1, Z_2, Z_3 en trois points arbitrairement choisis Z'_1, Z'_2, Z'_3. En particulier, on peut transformer une circonférence en elle-même en y déplaçant trois points d'une manière arbitraire. Le cercle sera transformé soit en lui-même, soit en la région extérieure suivant que les trois points primitifs Z_1, Z_2, Z_3, et les trois points nouveaux Z'_1, Z'_2, Z'_3, sont disposés dans le même sens de circulation, ou dans des sens contraires. Il en résulte immédiatement que, pour effectuer la représentation conforme d'une aire (S) sur le cercle (Σ), on peut fixer les arbitraires en se donnant trois points ζ_1, ζ_2, ζ_3 de C et les points homologues Z_1, Z_2, Z_3 se succédant dans le même ordre sur la circonférence (au lieu du point intérieur ω et de la direction issue de ce point).

On peut aussi transformer une circonférence en une droite arbi-

traire; le cercle devient alors un demi-plan. Nous aurons souvent à faire l'application du cercle de rayon un sur le demi-plan supérieur (affixes dont le coefficient de i est positif). Faisons-le géométriquement : une substitution homographique sur la variable complexe correspond à une suite de déplacements et d'inversions (ou symétries par rapport à des droites), ces dernières en nombre pair. Ici, il suffit de faire une inversion autour du point $-i$, avec le module 2, ce qui transforme la circonférence en l'axe réel; le cercle devenant le demi-plan supérieur, on ajoutera une symétrie par rapport à l'axe imaginaire, ce qui donne

$$Z' + i = -\frac{2}{Z + i}.$$

8. **Principe de la symétrie** (M. Schwarz). — Une courbe de Jordan est *analytique* si les deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ qui la définissent sont développables en série de Taylor au voisinage de chaque point; on appelle point *régulier* tout point où les deux dérivées $x'(t)$ et $y'(t)$ ne sont pas nulles en même temps.

Considérons le cas où le contour C de l'aire $(\mathfrak{I})$ du paragraphe précédent se compose d'arcs analytiques se raccordant en des points que nous appelons *sommets* (même si les deux arcs ont même tangente). On démontre que la fonction

$$Z = f(z)$$

qui opère la représentation conforme sur le cercle $(\mathfrak{C})$ (ou sur le demi-plan) est holomorphe en tout point de la frontière qui est régulier sur un arc analytique. Elle cesse d'être holomorphe aux sommets et aux points qui sont singuliers sur un arc analytique. La fonction peut donc être prolongée analytiquement à travers chaque arc analytique régulier de C et opère la représentation conforme sur l'extérieur du cercle $(\mathfrak{C})$ de la région extérieure $(\mathfrak{E})$ voisine de l'arc considéré.

Dans le cas où l'arc analytique considéré est rectiligne ou circulaire, ce prolongement analytique est très facilement obtenu par la méthode suivante due à M. Schwarz.

Nous supposerons qu'on ait fait la représentation conforme de l'aire $(\mathfrak{I})$ sur le demi-plan supérieur.

1° L'arc de C à travers lequel on veut faire le prolongement est une portion de droite AB parallèle à l'axe réel. La fonction $f(z)$ est définie d'un côté de AB, et sur AB où elle prend des valeurs réelles. Elle est continue sur AB, au sens suivant : CD étant une parallèle à AB, z un point de CD et ζ sa projection sur AB, on a

$$|f(z)-f(\zeta)|<\varepsilon$$

dès que la distance de CD à AB est suffisamment petite.

Prenons un arc de courbe AM_1B situé dans la région $(\mathfrak{I})$ où $f(z)$ est définie (le demi-cercle de diamètre AB par exemple), et son

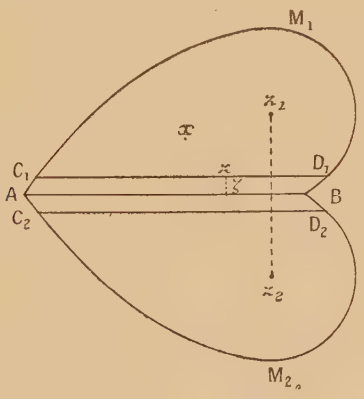

Fig. 2.

symétrique AM_2B qui est dans la région $(\mathfrak{E})$. Nous allons définir une fonction $F(z)$ dans le segment AM_2B, de la manière suivante : z_2 étant un point de cette région, soit z_1 son symétrique par rapport à AB, attribuons à z_2 la valeur conjuguée de $f(z_1)$ (1) :

$$F(z_2)=\overline{f(z_1)}.$$

Cette fonction est analytique dans le segment AM_2B; car, en désignant par δ des accroissements simultanés, δz_2 et δz_1 sont conju-

(1) Pour éviter des complications d'écriture, nous emploierons dans tout le cours de l'Ouvrage les notations suivantes : u étant un nombre complexe, $\overline{u}$ sera le nombre conjugué, $\mathfrak{R}u$ la partie réelle, $\mathfrak{I}u$ le coefficient de i. On a, par exemple,

$$u=\mathfrak{R}u+i.\mathfrak{I}u, \qquad \overline{u}=\mathfrak{R}u-i.\mathfrak{I}u.$$

gués (AB étant parallèle à l'axe réel), donc

$$\frac{\delta F(z_2)}{\delta z_2} = \frac{\delta\overline{[f(z_1)]}}{\delta z_2} = \frac{\overline{\delta f(z_1)}}{\overline{\delta z_1}} = \overline{\left[\frac{\delta f(z_1)}{\delta z_1}\right]}$$

quantité qui tend vers $\overline{f'(z_1)}$ lorsque δz_1 tend vers zéro.

Soient alors C_1D_1 et C_2D_2 deux cordes parallèles à AB, symétriques et très voisines; x étant un point du segment $C_1M_1D_1$, on a

$$2\pi i f(x) = \int_{C_1D_1} \frac{f(z)\,dz}{z-x} + \int_{D_1M_1C_1} \frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

$$0 = \int_{D_2C_2} \frac{F(z)\,dz}{z-x} + \int_{C_2M_2D_2} \frac{F(z)\,dz}{z-x}.$$

Faisons tendre chacune des cordes C_1D_1 et C_2D_2 vers AB. D'après la continuité rappelée plus haut, la première intégrale de la première ligne tend vers

$$\int_{AB} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - x}$$

car, en appelant ζ la projection sur AB du point z de C_1D_1, on a

$$\frac{f(z)}{z-x} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - x} = \frac{1}{z-x}[f(z) - f(\zeta)] + f(\zeta)\left(\frac{1}{z-x} - \frac{1}{\zeta - x}\right)$$

$$= \frac{f(z) - f(\zeta)}{z-x} + \frac{f(\zeta)(\zeta - z)}{(z-x)(\zeta - x)}.$$

Il est clair que x étant fixe à l'intérieur du segment, $z - x$ et $\zeta - x$ restent supérieurs à une limite non nulle, d'autre part $f(\zeta)$ est bornée; la quantité précédente peut donc être rendue aussi petite qu'on veut, et il en est de même de son intégrale le long de C_1D_1 et de AB.

La première intégrale de la seconde ligne a de même pour limite

$$\int_{BA} \frac{F(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - x},$$

mais $f(\zeta)$ étant réelle sur AB coïncide avec sa conjuguée $F(\zeta)$. En ajoutant membre à membre, ces deux intégrales se détruisent donc :

$$2\pi i f(x) = \int_{BM_1A} \frac{f(z)\,dz}{z-x} + \int_{AM_2B} \frac{F(z)\,dz}{z-x}.$$

Si l'on désigne par une seule notation $\mathcal{F}(z)$, la fonction définie sur tout le contour Γ comme étant égale à $f(z)$ sur l'arc AM_1B et à $F(z)$ sur AM_2B, on a

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\mathcal{F}(z)\,dz}{z-x}.$$

Il est évident que, si l'on avait pris x dans le segment AM_2B, on aurait trouvé

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\mathcal{F}(z)\,dz}{z-x};$$

$f(x)$ et $F(x)$ constituent donc une seule et même fonction analytique à l'intérieur de Γ. $F(x)$ est le prolongement de $f(x)$.

2° L'arc de C à travers lequel on veut faire le prolongement est une droite AB quelconque. Ce cas se ramène au précédent en faisant l'application sur le demi-plan supérieur en deux temps : d'abord une rotation $z' = ze^{i\theta}$ qui amène AB à être parallèle à l'axe réel, ensuite l'application du domaine obtenu sur le demi-plan $Z = f(z')$. On voit qu'il faut faire correspondre deux valeurs imaginaires conjuguées de $f(z)$ à deux points z symétriques l'un de l'autre par rapport à AB.

3° L'arc de C en question est un arc de cercle. On peut toujours faire la représentation sur le demi-plan supérieur en passant par l'intermédiaire d'une figure où l'arc de cercle a pour image une portion de droite; cette première transformation est réalisée par une fonction homographique $z' = \frac{az+b}{cz+d}$; et l'on sait que deux points symétriques par rapport à une droite correspondent à deux points inverses par rapport au cercle homologue de la droite. La conclusion est donc immédiate :

Étant donnée une aire limitée entre autres par un arc AB rectiligne ou circulaire, et représentée conformément sur le demi-plan supérieur, *le prolongement analytique à travers* AB *de la fonction qui opère la transformation s'obtient en attribuant des valeurs conjuguées l'une de l'autre à deux points images l'un de l'autre par rapport à l'arc* AB.

Le lecteur verra aisément comment cet énoncé se généralise quand on fait l'application sur un cercle.

III. — FONCTION MODULAIRE.

Nous exposerons la théorie de cette fonction, à partir de la représentation conforme, suivant la méthode indiquée par M. Lindelöf (1).

9. **Détermination principale de $\nu(z)$.** — Considérons, dans le plan d'une variable t, le triangle curviligne ABC situé dans le demi-plan supérieur (2)

$$\mathfrak{I}t > 0$$

et limité par les deux demi-droites

$$AB, \quad \mathfrak{R}t = 0 \qquad \text{et} \qquad AC, \quad \mathfrak{R}t = 1$$

et la demi-circonférence de diamètre BC(0-1) (*fig.* 3).

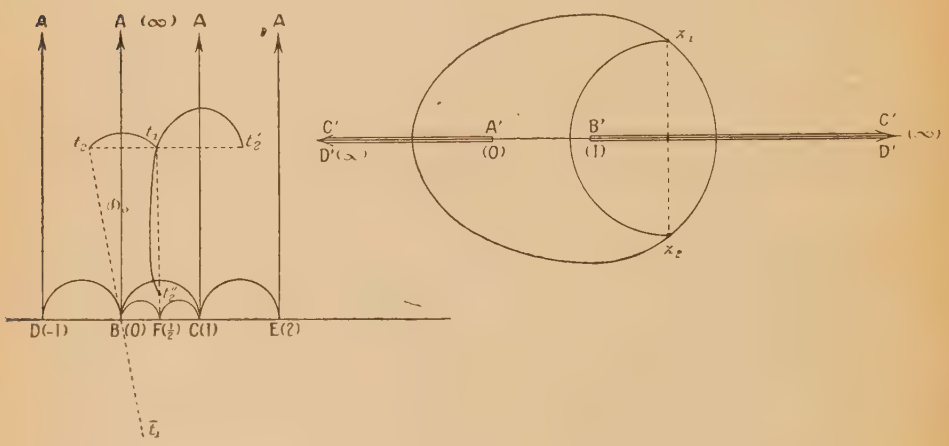

Fig. 3.

On peut en faire la représentation conforme sur le demi-plan supérieur d'une variable z, en amenant les trois sommets A, B, C, respectivement aux points 0, 1, ∞ de l'axe réel. Cette représenta-

(1) *Sur le théorème de M. Picard dans la théorie des fonctions monogènes* (*Congrès des Mathématiques à Stockholm*, 1909).

(2) *Voir* la note (1) de la section précédente.

tion est définie par une fonction

$$z = \lambda(t),$$

holomorphe dans le triangle ABC. D'après les résultats de la section précédente, elle est prolongeable à travers chacun des côtés.

Le prolongement à travers le côté AB est immédiat : à deux points t_1 et t_2 symétriques par rapport à l'axe imaginaire correspondront deux points z_1 et z_2 symétriques par rapport à l'axe réel. La fonction ainsi prolongée représente conformément le triangle ABD symétrique de ABC par rapport à l'axe imaginaire (plan t) sur le demi-plan inférieur (plan z). La fonction inverse

$$t = \nu(z)$$

est donc maintenant définie dans tout le plan; mais il faut bien remarquer que le prolongement a été fait à travers le côté AB, c'est-à-dire à travers le segment 0-1 de l'axe réel. Si donc on considère au point z_1 du demi-plan supérieur l'élément de fonction analytique qui résulte de la première définition et qu'on en fasse le prolongement au sens de Weierstrass, il faut traverser l'axe réel entre 0 et 1 pour arriver en un point z_2 du demi-plan inférieur avec la détermination que nous venons de définir. C'est donc le plan z armé des deux coupures ∞-0 suivant l'axe réel négatif et 1-∞ suivant l'axe réel positif, qui a pour image le quadrilatère curviligne ACBD.

Ce quadrilatère est le *domaine fondamental* $\mathfrak{D}_0$, celui dans lequel la *fonction modulaire* $\lambda(t)$ est définie jusqu'ici. Les valeurs de t du domaine fondamental constituent la *branche principale* de la fonction inverse $\nu(z)$.

10. *Les différentes branches de $\nu(z)$ et les substitutions qui les relient.* — La fonction $z = \lambda(t)$ définie dans le triangle ABC peut être prolongée aussi bien à travers le côté AC, ce qui donne la représentation du triangle ACE sur le demi-plan inférieur. Les points de ce triangle ACE ont donc, tout comme ceux de ABD, leurs homologues dans le demi-plan inférieur. La fonction inverse

$$t = \nu(z)$$

est donc multiforme, et nous en avons déjà deux déterminations

dans le demi-plan inférieur. Partons d'un point z_2 de ce demi-plan, et considérons l'ancienne détermination t_2 (dans le triangle ABD). Traçons un chemin continu qui passe dans le demi-plan supérieur à travers le segment 0-1 ou AB, le point homologue t passe dans le triangle ABC; revenons ensuite dans le demi-plan inférieur en traversant la demi-droite $0\text{-}\infty$ ou AC, le point t passe dans le triangle ACE; quand nous serons revenus au point de départ z_2, le point t sera à la nouvelle détermination t'_2. Nous voyons donc qu'on passe de l'ancienne à la nouvelle valeur de t en faisant décrire au point z un chemin entourant une fois le point 0 dans le sens positif, sans entourer le point 1. En prenant un chemin symétrique par rapport à l'axe réel, on obtient immédiatement la relation entre t_2 et t'_2 : à la symétrie entre z_2 et z_1 correspond la symétrie entre t'_2 et t_1 par rapport à AB lorsqu'on traverse 0-1, et la symétrie entre t'_2 et t''_1 par rapport à AC lorsqu'on traverse $0\text{-}\infty$; l'effet de ces deux symétries est une translation égale à 2 :

$$t'_2 = t_2 + 2.$$

Il est alors évident que la nouvelle détermination s'étendra comme l'ancienne dans le demi-plan supérieur à travers 0-1, et celle qui en résulte dans le demi-plan inférieur à travers $0\text{-}\infty$, et ainsi de suite; de même l'ancienne détermination s'étend dans le demi-plan supérieur à travers $0\text{-}\infty$ et ainsi de suite. On peut donc tourner un nombre quelconque de fois autour de l'origine, chaque circulation ajoutant ou retranchant 2 à la fonction $v(z)$. L'origine est un *point critique logarithmique* pour cette fonction. Nous avons donc une infinité de déterminations pour t.

11. La fonction $z = \lambda(t)$ définie primitivement dans le triangle ABC peut être encore prolongée à travers le côté curviligne BC; on obtient ainsi la représentation sur le demi-plan inférieur du triangle curviligne BCF (BF et CF sont des demi-cercles égaux et tangents en F). Ceci donne pour chaque valeur z_2 du demi-plan inférieur, une nouvelle détermination t''_2 (effectivement distincte de toutes les précédentes comme on le voit géométriquement). En raisonnant comme pour t'_2, on voit que cette valeur s'obtient à partir de t_2 en faisant décrire à z un chemin fermé partant de z_2 et y revenant après avoir traversé le segment 0-1 et le

segment 1-∞, c'est-à-dire un chemin entourant une fois 1 dans le sens négatif, sans entourer l'origine. La relation entre t_2'' et t_2 s'obtiendra encore en supposant ce chemin symétrique par rapport à l'axe réel : à z_2 point de départ correspond t_2 du triangle ABD ; à z_1 correspond t_1 symétrique de t_2 par rapport à AB ; à z_2 point d'arrivée correspond t_2'' symétrique (ou inverse) de t_1 par rapport au cercle BC. Si nous considérons le point $\overline{t_1}$, il est symétrique de t_1 par rapport à l'axe réel, donc symétrique de t_2 par rapport à l'origine

$$\overline{t_1} = -t_2.$$

Le passage de $\overline{t_1}$ à t_2'', qui est géométriquement une inversion par rapport à F avec symétrie par rapport à l'axe réel, se traduit analytiquement par une substitution très simple ; en supposant l'origine transportée au point F, et désignant par de grandes lettres les nouvelles affixes, on a

$$T_2'' = \frac{\frac{1}{4}}{\overline{T_1}};$$

or

$$T_2'' = t_2'' - \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \overline{T_1} = \overline{t_1} - \frac{1}{2}.$$

Donc

$$t_2'' - \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{4}}{\overline{t_1} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{-t_2 - \frac{1}{2}}$$

ou

$$2t_2'' - 1 = -\frac{1}{2t_2 + 1},$$

et finalement

$$t_2'' = \frac{t_2}{2t_2 + 1}.$$

Cette nouvelle détermination pourra, comme la première t_2, s'étendre dans le demi-plan supérieur soit à travers le segment 0-1, soit à travers la demi-droite 0-∞ ; et ainsi, chaque fois qu'on aura une nouvelle détermination dans un demi-plan, on passera dans l'autre en traversant l'une des trois portions de l'axe réel (∞-0, 0-1, 1-∞). On a donc, dans tout le plan z, une infinité de branches pour la fonction

$$t = \nu(z).$$

Elles se déduisent de l'une d'elles en faisant décrire à z des chemins ne passant pas par les points 0 et 1. Un tel chemin se ramène, par déformation continue et sans rencontrer les points 0 et 1, à une suite de lacets autour de ces deux points. Chacun de ces lacets fait subir à la détermination principale une substitution connue, la branche obtenue après chaque lacet s'évalue donc de proche en proche en fonction de la branche principale.

Il est utile de faire remarquer que la fonction $\nu(z)$ a trois points critiques, les deux points 0 et 1 à distance finie dont nous venons de nous occuper, et le point à l'infini. Un lacet autour de ∞ équivaut en effet à un lacet autour de 0 suivi d'un lacet autour de 1 dans le même sens; les deux substitutions produites, n'étant pas inverses l'une de l'autre, ne se détruisent pas; la détermination change donc par circulation autour de ∞. Le lecteur trouvera aisément la substitution éprouvée par la branche principale lors d'une telle circulation : 1° en considérant le déplacement correspondant du point t, comme nous l'avons fait pour 0 et pour 1; 2° en faisant le produit des deux substitutions relatives à 0 et à 1 (les deux circulations devant être de même sens, il faut remplacer l'une des substitutions trouvées par son inverse).

12. **Groupe modulaire.** — Il résulte de là que toutes les branches de la fonction $t = \nu(z)$ se déduisent de la première par les substitutions du groupe dérivé des deux substitutions fondamentales que nous avons trouvées :

$$(S_1) \qquad t' = t + 2,$$

$$(S_2) \qquad t'' = \frac{t}{2t + 1}.$$

Ces deux substitutions rentrent dans le type

$$t' = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta},$$

où α, β, γ, δ sont des coefficients réels dont le déterminant est égal à 1 (on peut toujours ramener à la valeur 1 le déterminant lorsqu'il est positif, sans détruire la réalité des coefficients). De telles substitutions s'appellent substitutions fuchsiennes : elles transforment un point réel en un point réel, et par conséquent l'axe réel dans son ensemble en lui-même; elles appliquent le

demi-plan supérieur sur lui-même (et de même pour le demi-plan inférieur), car on a

$$t' = \frac{(\alpha t + \beta)(\gamma \bar{t} + \delta)}{(\gamma t + \delta)(\gamma \bar{t} + \delta)} = \frac{\alpha\gamma t\bar{t} + \alpha\delta t + \beta\gamma \bar{t} + \beta\delta}{(\gamma t + \delta)(\gamma \bar{t} + \delta)},$$

le dénominateur est positif, et les termes extrêmes du numérateur sont réels; il en résulte que

$$\mathfrak{I} t' = \frac{\mathfrak{I}(\alpha\delta t + \beta\gamma \bar{t})}{\text{dén. pos.}} = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)\mathfrak{I} t}{\text{dén. pos.}} = \frac{\mathfrak{I} t}{\text{dén. pos.}}.$$

Ces substitutions transforment les cercles (et droites) orthogonaux à l'axe réel en cercles (et droites) orthogonaux à cet axe.

Elles se partagent en trois catégories suivant la nature de leurs points doubles (c'est-à-dire des points que la substitution laisse invariants); ces derniers sont donnés par l'équation

$$\gamma t^2 + (\delta - \alpha) t - \beta = 0.$$

Leur réalité dépend du signe de

$$(\delta - \alpha)^2 + 4\beta\gamma = (\alpha + \delta)^2 - 4\alpha\delta + 4\beta\gamma = (\alpha + \delta)^2 - 4;$$

d'où la classification :

$\lvert \alpha + \delta \rvert > 2$,	points doubles réels et distincts, subst. hyperbolique,
$\lvert \alpha + \delta \rvert = 2$,	points doubles réels et confondus, subst. parabolique,
$\lvert \alpha + \delta \rvert < 2$,	points doubles imaginaires conjugués, subst. elliptique.

A chacune de ces catégories correspond une forme réduite que nous allons indiquer. Lorsque les points doubles sont distincts, on sait que le rapport anharmonique de deux éléments homologues avec les éléments doubles est constant. La relation peut donc s'écrire

$$\text{(H)} \qquad \frac{t' - a}{t' - b} = \mathrm{K} \frac{t - a}{t - b},$$

a et b étant les points doubles.

Premier cas : Substitution hyperbolique. a et b sont réels, t et t' étant réels en même temps, K est réel (et différent de 1 si la substitution n'est pas identique), la forme canonique est (H) où a, b sont réels et K positif (en vertu de $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$).

Si l'un des points doubles b est à l'infini, on a

$$(H_1) \qquad t' - a = K(t - a).$$

Deuxième cas : Substitution elliptique. $b = \bar{a}$, t étant réel, $t - a$ et $t - \bar{a}$ sont imaginaires conjugués, leur quotient a pour module 1, il en est de même pour $\frac{t' - a}{t' - \bar{a}}$; donc K a pour module 1 (sans se réduire à l'unité); la forme canonique est donc

$$(E') \qquad \frac{t' - a}{t' - \bar{a}} = e^{i\theta} \frac{t - a}{t - \bar{a}},$$

a étant imaginaire et θ réel.

Dans le cas de la substitution parabolique, supposons d'abord le point double à l'infini; il suffit de se reporter à l'équation donnant les points doubles pour voir qu'elle a ses deux racines infinies lorsque $\gamma = 0$, $\delta - \alpha = 0$; la substitution se réduit alors à

$$t' = \frac{\alpha t + \beta}{\alpha} = t + \frac{\beta}{\alpha},$$

qui est de la forme

$$(P_1) \qquad t' = t + K,$$

K étant réel. Si maintenant, le point double est a, la relation entre $\frac{1}{t' - a}$ et $\frac{1}{t - a}$ est toujours homographique (comme on le voit par l'intermédiaire de t' et de t); ses points doubles correspondent aux précédents; ils sont donc confondus avec ∞; la relation a donc la forme canonique

$$(P) \qquad \frac{1}{t' - a} = \frac{1}{t - a} + K,$$

a et K étant réels.

13. Dans le cas qui nous occupe, les deux substitutions fondamentales du groupe (S_1) et (S_2) ont en outre des coefficients entiers et satisfaisant aux conditions de parité

$$\alpha \equiv 1, \qquad \beta \equiv 0, \qquad \gamma \equiv 0, \qquad \delta \equiv 1 \pmod 2.$$

Il en sera de même de toutes les substitutions qui en dérivent. Pour former les produits, les puissances et les inverses des substi-

tutions fuchsiennes, il est utile de leur associer des substitutions linéaires homogènes à deux variables et le tableau des coefficients :

$$(S) \qquad t' = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \qquad \begin{cases} x' = \alpha x + \beta y, \\ y' = \gamma x + \delta y, \end{cases} \qquad S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Le lecteur constatera aisément que le produit de deux substitutions correspond au produit des deux tableaux effectué en associant les lignes avec les colonnes :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' + \beta\gamma' & \alpha\beta' + \beta\delta' \\ \gamma\alpha' + \delta\gamma' & \gamma\beta' + \delta\delta' \end{pmatrix}.$$

Dans le dernier membre, les seuls produits impairs sont ceux dont les deux facteurs sont impairs, c'est-à-dire $\alpha\alpha'$ et $\delta\delta'$; tous les autres sont pairs, les éléments qui constituent la diagonale principale sont donc impairs et les autres pairs.

Pour l'inverse, on voit immédiatement que

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

La propriété de parité en question appartient donc bien à toutes les substitutions du groupe. La réciproque est vraie, c'est-à-dire que le groupe peut être défini par cette propriété. On dit pour cette raison que c'est un groupe de congruence. Pour le démontrer, nous allons étudier l'effet sur une substitution de la multiplication par une puissance d'une substitution fondamentale. On a tout d'abord

$$S_1^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S_2^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2p & 1 \end{pmatrix}$$

quels que soient les entiers n et p, positifs ou négatifs. Il en résulte que si

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

on a

$$SS_1^n = \begin{pmatrix} \alpha & 2n\alpha + \beta \\ \gamma & 2n\gamma + \delta \end{pmatrix}, \qquad SS_2^p = \begin{pmatrix} \alpha + 2p\beta & \beta \\ \gamma + 2p\delta & \delta \end{pmatrix}.$$

Partant de la substitution S, on peut la multiplier par une puissance de S_1 et choisir l'exposant n de façon que l'élément $2n\alpha + \beta$ qui remplace β soit compris entre $-\alpha$ et $+\alpha$, on aura ainsi une

substitution produit

$$SS_1^n = \sum = \begin{pmatrix} \alpha & \beta' \\ \gamma & \delta' \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad |\beta'| < |\alpha|$$

(égalité exclue par suite de la parité). Multiplions-la par une puissance de S_2, p étant choisi de façon que l'élément $\alpha + 2p\beta'$ qui remplacera α soit compris entre $-\beta'$ et $+\beta'$, on aura

$$\sum S_2^p = S' = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad |\alpha'| < |\beta'|.$$

En continuant de la sorte en multipliant alternativement par les puissances de S_1 et de S_2, on arrivera à une substitution où α sera ± 1, et β nul; comme on peut changer les signes de tous les éléments, cette substitution aura la forme (en tenant compte de $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ et de la parité)

$$\sum^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2s & 1 \end{pmatrix} = S_2^s.$$

On a donc établi une relation de la forme

$$SS_1^n S_2^p \ldots S_2^q S_1^r = S_2^s;$$

d'où

$$S = S_s^2 S_1^{-r} S_2^{-q} \ldots S_2^{-p} S_1^{-n},$$

ce qui montre bien que la substitution arbitraire S est dérivée des deux substitutions fondamentales S_1 et S_2.

Les deux substitutions (S_1) et (S_2) sont paraboliques : (S_1) rentre dans la forme réduite (P_1) pour $K = 2$; les points doubles de (S_2) sont donnés par

$$t = \frac{t}{2t+1}, \qquad 2t^2 = 0.$$

D'ailleurs, pour chacune d'elles, $\alpha = \delta = 1$, donc $\alpha + \delta = 2$, ce qui caractérise une substitution parabolique. Toutes les substitutions du groupe sont hyperboliques ou paraboliques. En effet, une substitution est elliptique lorsque

$$|\alpha + \delta| < 2.$$

Dans notre groupe, α et δ étant des entiers impairs, leur somme

est paire, il faudrait donc que

$$\alpha + \delta = 0$$

ou

$$\alpha = 2h + 1, \qquad \delta = -(2h + 1).$$

On aurait alors, d'après $\alpha\delta - \delta\gamma = 1$,

$$\beta\gamma = \alpha\delta - 1 = -(2h+2)^2 - 1 = -[4(h^2+h)+2],$$

$\beta\gamma$ serait multiple de 2, mais pas de 4, ce qui est incompatible avec la parité de β et de γ.

14. **Réseau de quadrilatères de la variable t et surface de Riemann correspondante pour la variable z.** — Nous avons vu que, pour chaque valeur de z, la fonction $t = \nu(z)$ avait une infinité de déterminations se déduisant de la première par les substitutions du groupe modulaire. Si nous revenons à la fonction $z = \lambda(t)$, ce groupe comprend les transformations que l'on peut faire subir à la variable t sans altérer la valeur de la fonction. Ces transformations se présentent donc comme analogues à l'addition des périodes pour les fonctions simplement ou doublement périodiques. De même que ces dernières fonctions sont complètement connues quand on a leurs valeurs dans un parallélogramme de périodes, la fonction modulaire est complètement connue lorsqu'on a la valeur qui correspond à chaque point t du quadrilatère fondamental $\mathfrak{D}_0$. En effet, toutes les valeurs qu'il est permis de donner à t sont celles que peut acquérir la fonction $\nu(z)$ prolongée autant qu'il est possible, comme nous l'avons fait plus haut.

Pour les fonctions doublement périodiques, on obtient un réseau de parallélogrammes en donnant au parallélogramme fondamental des translations correspondant à toutes les périodes. L'opération analogue ici consiste à prendre l'image du quadrilatère fondamental $\mathfrak{D}_0$ par chacune des transformations du groupe. Chacune de ces images sera un quadrilatère, ayant pour côtés des demi-cercles (ou des demi-droites) orthogonaux à l'axe réel, et situé dans le demi-plan supérieur, comme il résulte des propriétés générales des substitutions fuchsiennes rappelées plus haut. Ce réseau de quadrilatères s'obtient par une voie beaucoup plus

géométrique en reprenant l'idée du prolongement analytique qui se traduit par le principe de la symétrie.

La branche principale est définie dans le plan z armé des deux coupures $(-\infty, 0)$ et $(1+\infty)$ suivant l'axe réel; elle représente ce plan sur le quadrilatère $\mathfrak{D}_0$, le demi-plan supérieur correspondant au triangle ABC et le demi-plan inférieur au triangle ABD. Le premier prolongement que nous avons effectué, et qui nous définissait une nouvelle branche dans le demi-plan inférieur, représentait ce demi-plan sur le triangle ACE symétrique de ABC par rapport à AC; pour compléter la définition de cette seconde branche, il suffit de passer au demi-plan supérieur à travers le segment 0-1, ce qui donne sur le plan t le triangle symétrique de ACE par rapport à AE; la seconde branche représente donc le plan z armé des deux coupures sur le quadrilatère $\mathfrak{D}_1$ symétrique de $\mathfrak{D}_0$ par rapport à AC. Si l'on considère de même toutes les branches qui se déduisent de la première par circulation autour de l'origine, c'est-à-dire algébriquement par les puissances positives et négatives de la substitution (S_1), elles représentent le plan z avec ses coupures sur des quadrilatères $\mathfrak{D}$ qui peuvent s'obtenir de proche en proche en effectuant une symétrie autour du côté rectiligne libre du quadrilatère déjà obtenu.

15. Envisageons maintenant le second prolongement effectué (n° 11); la branche ainsi obtenue représentait le demi-plan inférieur sur le triangle BCF symétrique de ABC par rapport au côté circulaire BC; l'extension de cette nouvelle branche dans le demi-plan supérieur se fait à travers le segment 0-1, ce qui donne sur le plan t le triangle symétrique de BCF par rapport au côté circulaire BF; ce dernier triangle est donc l'inverse par rapport au cercle BC du triangle symétrique de ABC par rapport au côté AB. Le quadrilatère obtenu $\mathfrak{D}_2$ se déduit donc de $\mathfrak{D}_0$ en effectuant une symétrie par rapport au côté circulaire BC, opération beaucoup plus simple que la traduction géométrique de la substitution (S_2). On verrait de même que l'inverse de (S_2) donnerait le symétrique de $\mathfrak{D}_0$ par rapport au côté DB, et que les puissances de (S_2) donneraient les symétriques successifs de ces quadrilatères par rapport aux côtés aboutissant en B. D'une manière générale, tous les quadrilatères s'obtiendront de proche en proche en prenant les

symétriques d'un quadrilatère déjà obtenu par rapport à ses côtés libres (¹). Ce mode de construction du réseau a l'avantage de montrer clairement que les quadrilatères s'étendent sur le demi-plan supérieur t sans laisser entre eux de lacune non couverte, et sans se recouvrir mutuellement. Il est d'ailleurs tout à fait vraisemblable, en regardant la figure, qu'ils arrivent à recouvrir tout le demi-plan; ce fait a été démontré en toute rigueur par Poincaré

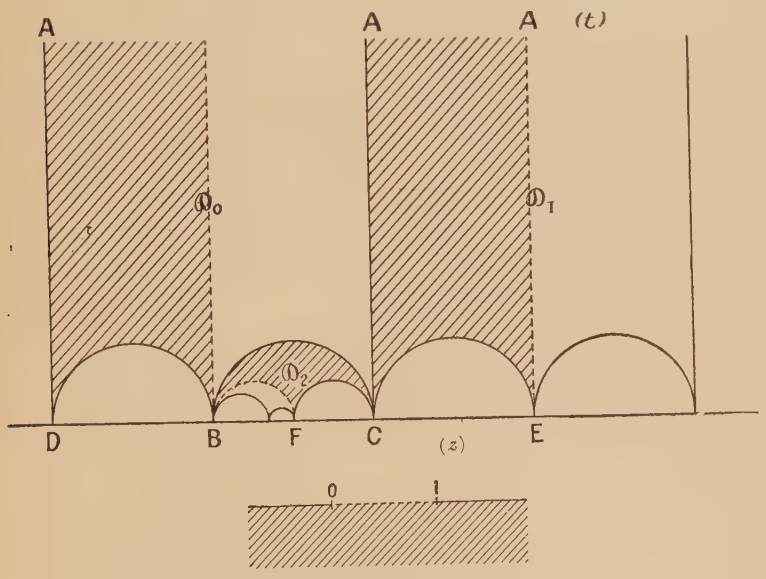

Fig. 4.

dans la théorie des groupes fuchsiens (en utilisant la notion de longueur non euclidienne appliquée à un chemin allant d'un point de $\mathfrak{D}_0$ à un point arbitraire du demi-plan).

16. Chacun de nos quadrilatères $\mathfrak{D}$ est la représentation conforme du plan z avec ses deux coupures. Réunissons des quadrilatères limitrophes, $\mathfrak{D}_0$, $\mathfrak{D}_1$, et $\mathfrak{D}_2$ pour fixer les idées. Chacun d'eux

(¹) Cette symétrie qui rattache deux quadrilatères limitrophes ne met pas en correspondance les points homologues : pour $\mathfrak{D}_0$ et $\mathfrak{D}_1$ ou $\mathfrak{D}_0$ et $\mathfrak{D}_2$, on voit que le triangle s'appliquant sur un demi-plan z correspond à celui qui s'applique sur l'autre.

est l'image d'un pareil plan $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$; $\mathfrak{D}_0$ et $\mathfrak{D}_1$ étant réunis par le côté AC, la réunion de ces domaines, c'est-à-dire la suppression de AC en tant que frontière, correspondra à la soudure des deux plans $\mathfrak{P}_0$ et $\mathfrak{P}_1$ par les bords homologues de AC; nous devons donc coller le bord supérieur de la coupure $(-\infty, 0)$ de $\mathfrak{P}_0$ au bord inférieur de la même coupure de $\mathfrak{P}_1$. De la sorte, si, en cheminant sur le demi-plan supérieur $\mathfrak{P}_0$, on rencontre l'axe réel dans sa partie négative, on n'est plus arrêté, mais on continue sur le demi-plan inférieur $\mathfrak{P}_1$, de même que sur le plan t un chemin tracé sur le triangle ABC du domaine $\mathfrak{D}_0$ et qui rencontre AC continue sur le triangle ACE du domaine $\mathfrak{D}_1$. Pareillement, on soudera le bord supérieur de la coupure $(1, +\infty)$ de $\mathfrak{P}_0$ au bord inférieur de la même coupure de $\mathfrak{P}_2$ (ces bords correspondant à BC). Cet ensemble de 3 feuillets plans auquel il reste 8 bords libres est la représentation conforme de l'octogone curviligne obtenu par la réunion de $\mathfrak{D}_0$, $\mathfrak{D}_1$ et $\mathfrak{D}_2$. On ferait de même avec un plus grand nombre de domaines. On voit immédiatement que le demi-plan supérieur de la variable t se représente conformément sur une surface formée d'une infinité de feuillets plans identiques, affectés des coupures $(-\infty, 0)$ et $(1, +\infty)$ et dont les bords sont soudés entre eux suivant l'image exacte de la contiguïté des quadrilatères $\mathfrak{D}$ limitrophes. Cet ensemble est la *surface de Riemann à une infinité de feuillets* relative à la fonction $\nu(z)$. A chaque valeur de z correspondent une infinité de déterminations; mais à une valeur de z prise sur un feuillet déterminé correspond une valeur unique de t située dans le quadrilatère correspondant à ce feuillet.

17. Si nous considérons maintenant une aire simplement connexe située dans le demi-plan t, elle aura pour image une aire simplement connexe de la surface de Riemann, mais qui s'étendra en général sur un certain nombre de feuillets, et qui pourra ainsi se recouvrir elle-même. Prenons l'exemple très simple d'une aire $\mathfrak{A}$ s'étendant sur $\mathfrak{D}_0$ et débordant un peu au delà des côtés rectilignes AC et AD (*fig.* 5). La partie située sur $\mathfrak{D}_0$ a pour homologue une sorte de languette courbée comprise entre les deux arcs $\alpha\beta\gamma$ et $\varepsilon\zeta\eta$ d'une part, et le bord supérieur $\alpha\eta$ et le bord inférieur $\gamma\varepsilon$ de la coupure $(0, -\infty)$ d'autre part, ceci sur le feuillet $\mathfrak{P}_0$. La partie

situé sur $\mathfrak{D}_1$ a pour homologue le segment $\alpha\vartheta\eta$ (hachures horizontales), sur le feuillet $\mathfrak{P}_1$, segment soudé à la languette précédente suivant $\varkappa\eta$. La partie située sur $\mathfrak{D}'_1$ a pour homologue le segment $\gamma\delta\varepsilon$ (hachures verticales), sur le feuillet $\mathfrak{P}'_1$, soudé à la languette suivant $\gamma\varepsilon$. La considération de ces feuillets qui se superposent montre bien que le point z ne peut pas tourner autour de O, quel que soit le déplacement du point t dans l'aire $\mathfrak{A}$. Les valeurs que

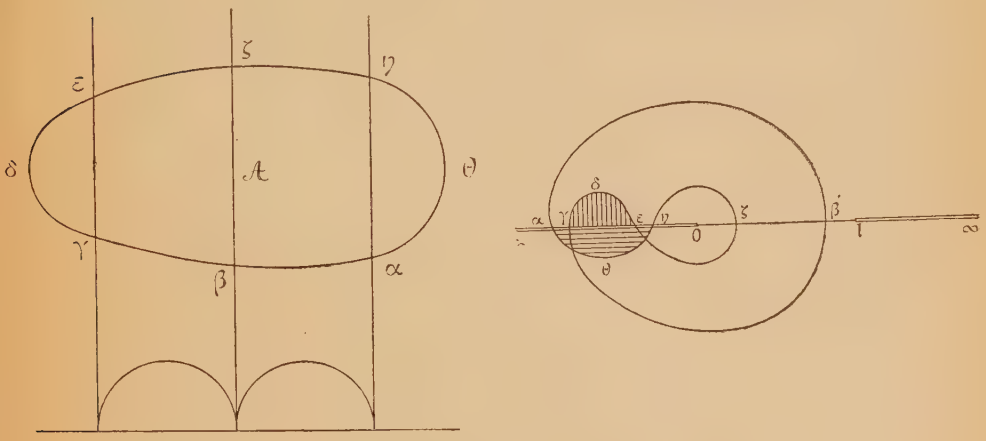

Fig. 5.

prend z aux différents points de $\mathfrak{A}$, reportées sur un plan z unique, auraient donné un ensemble de points formant une sorte d'anneau autour de O, et n'auraient donc pas permis d'affirmer cette propriété.

Inversement, si l'on fait décrire à z une aire simplement connexe sur la surface de Riemann, ne contenant pas les points critiques 0, 1, ∞, la variable t décrira dans son plan une aire simplement connexe, tout entière à distance finie et ne s'approchant pas indéfiniment de l'axe réel. Cette dernière partie, qui est assez intuitive, peut s'établir rigoureusement en analysant ce que devient z lorsque t approche d'une valeur réelle. Supposons d'abord que t augmente indéfiniment. Il peut arriver que t s'éloigne indéfiniment dans la direction de l'axe imaginaire; si nous remplaçons le point t par son homologue dans le domaine fondamental $\mathfrak{D}_0$, ce qui est permis pour avoir la valeur de z, on voit que z tend vers zéro, correspondant au sommet A du quadrilatère; ou bien t reste

dans un seul quadrilatère (ou dans un nombre fini), auquel cas z tend vers zéro en restant sur le même feuillet (ou sur un nombre fini), ou bien t traverse une infinité de quadrilatères, auquel cas z tend vers zéro en changeant une infinité de fois de feuillet, et en s'enroulant en spirale. Si le point t reste à distance finie dans la direction de l'axe imaginaire, c'est qu'il s'éloigne indéfiniment dans la direction de l'axe réel; alors z ne tend pas vers zéro, mais s'enroule indéfiniment autour de ce point en changeant de feuillet indéfiniment. En faisant tendre t vers zéro, on aura des conclusions analogues; suivant que le chemin traverse tous les cercles tangents en B à l'axe réel, ou reste extérieur à l'un d'eux, z tendra vers 1, ou s'enroulera indéfiniment autour de ce point sans y tendre. Enfin, en faisant tendre t vers 1, on aurait les mêmes conclusions avec le point à l'infini de z.

Les points t dont l'affixe est un nombre réel rationnel sont les homologues des points 0, 1, ∞ par les substitutions du groupe modulaire; les mêmes conclusions sont donc valables lorsque t tend vers un point rationnel. Enfin, si t tend vers un point irrationnel, ce dernier n'étant sommet d'aucun quadrilatère, t devra traverser une infinité de domaines (D) différents; et z changera une infinité de fois de feuillet, mais en s'enroulant autour de points critiques différents. On voit donc que le fait de passer sur des feuillets indéfiniment nouveaux de la surface de Riemann doit être regardé comme une marche vers la frontière tout comme la marche vers un point critique 0, 1 ou ∞.

En résumé, *la fonction* $\nu(z)$ *existe pour toutes les valeurs de* z; *elle a une infinité de déterminations et trois points critiques* 0, 1, ∞; *pour toutes ces déterminations, le coefficient de* i *est toujours positif.*

La fonction modulaire $\lambda(t)$ *n'existe que dans le demi-plan supérieur, l'axe réel étant pour elle-même une coupure essentielle* (1), *elle est invariante pour toutes les substitutions du*

(1) Ce fait, déjà certain d'après ce qui précède, peut être rattaché aux propriétés générales des fonctions analytiques : les quadrilatères (D) obtenus par application réitérée de (S_2) se condensent autour de l'origine; la fonction $\lambda(t) - h$ ayant un zéro dans chacun de ces quadrilatères, admet forcément O comme point singulier. On dirait la même chose pour tout point rationnel de l'axe réel. Les points singuliers sont donc denses sur tout l'axe réel.

groupe modulaire :

$$\lambda\left(\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}\right)=\lambda(t),$$

lorsque

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1$$

et

$$\alpha\equiv 1,\qquad \beta\equiv 0,\qquad \gamma\equiv 0,\qquad \delta\equiv 1\pmod 2.$$

18. Fonction modulaire dans le cercle de rayon unité. — Faisons la représentation conforme du demi-plan supérieur t sur l'intérieur du cercle

$$|w|<1;$$

il suffit de prendre pour cela un nombre complexe a tel que $\Im a>0$ et de poser

$$w=\frac{t-a}{t-\overline{a}};$$

w est alors une fonction de z définie sur la surface de Riemann et qui reste toujours bornée en module. A cause de cela, cette fonction nous sera très souvent utile, nous la formerons à partir de la fonction $\nu(z)$ en prenant pour a une valeur particulière de la fonction ν :

$$w=\omega(z)=\frac{\nu(z)-\nu(a_0)}{\nu(z)-\overline{\nu(a_0)}}.$$

Inversement, on peut considérer z comme fonction de w, nous la désignerons par

$$z=\chi(w).$$

Elle s'évalue d'ailleurs par

$$z=\lambda\left[\frac{w\overline{\nu(a_0)}-\nu(a_0)}{w-1}\right].$$

Cette fonction est définie seulement à l'intérieur du cercle de rayon 1, dont la circonférence est une coupure essentielle; elle est holomorphe à l'intérieur de ce cercle et n'y prend jamais ni la valeur 0, ni la valeur 1; elle reste invariante par les substitutions d'un certain groupe effectuées sur la variable w. Ce groupe est le transformé du groupe modulaire étudié en détail par la substitution qui permet de passer de t à w.

CHAPITRE II.

THÉORÈMES DE M. PICARD ET GÉNÉRALISATIONS OBTENUS PAR APPLICATION DIRECTE DE LA FONCTION MODULAIRE.

19. **Théorème de M. Picard sur les fonctions entières.** — *Étant donnée une fonction entière $f(x)$, il existe au plus une valeur finie a telle que l'équation*

$$f(x) - a = 0, \tag{1}$$

n'ait pas de racine.

Autrement dit, une fonction entière prend toutes les valeurs finies sauf *une au plus*. On appelle *valeur exceptionnelle* toute valeur que la fonction ne prend pas.

Cet énoncé, appelé aussi *premier théorème de M. Picard*, a été obtenu en 1879 (¹) par la voie que nous allons suivre.

Supposons une fonction entière ayant *deux* valeurs exceptionnelles a et b, nous allons montrer qu'elle se réduit nécessairement à une constante. On peut d'abord ramener les valeurs exceptionnelles à être 0 et 1 par la transformation linéaire

$$g(x) = \frac{f(x) - a}{b - a}.$$

$\nu(z)$ étant la fonction du Chapitre précédent, formons la fonction

$$\nu[g(x)];$$

nous choisissons une détermination initiale pour $x = 0$; par continuité, la fonction sera définie en tout point x; je dis qu'elle est

(¹) Émile Picard, *Sur une propriété des fonctions entières* (*C. R. Acad. Sc.*, t. LXXXVIII, 1879, p. 1024); et *Mémoire sur les fonctions entières* (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 2e série, t. IX, 1880, p. 145).

uniforme. En effet, x décrivant une courbe fermée C dans son plan, z décrit une courbe fermée Γ puisque $g(x)$ est uniforme; cette courbe n'entoure d'ailleurs aucun des points 0 et 1, car si l'on réduit C à un point par déformation continue, Γ se réduira à un point par déformation continue sans avoir jamais rencontré les points 0 et 1; lorsque z décrit Γ, $\nu(z)$ reprend donc sa valeur initiale.

La fonction $\nu[g(x)]$ est donc une fonction uniforme, holomorphe au voisinage de tout point, c'est-à-dire une fonction entière; or, nous savons que son coefficient de i est toujours positif :

$$\mathfrak{I}\nu[g(x)] > 0;$$

ceci contredit le théorème de Weierstrass, car cette fonction ayant ∞ pour singulier essentiel doit s'approcher autant qu'on veut de toute valeur, en particulier de $-i$; elle ne peut pas se réduire à un polynome, car elle prendrait toutes les valeurs; c'est donc une constante, et $g(x)$ également.

M. Picard terminait son raisonnement d'une manière légèrement différente : il formait la fonction

$$G(x) = e^{i\nu[g(x)]},$$

qui est aussi une fonction entière d'après l'hypothèse, et calculait son module

$$|G(x)| = e^{-\mathfrak{I}\nu[g(x)]} < 1,$$

le théorème de Liouville nous affirme alors qu'elle se réduit à une constante.

Nous verrons plus tard qu'on peut affirmer qu'une fonction entière prend une infinité de fois toutes les valeurs sauf une au plus. S'il existe deux valeurs finies pour lesquelles l'équation (1) ait un nombre fini de racines, $f(x)$ est un polynome.

Signalons immédiatement un corollaire relatif aux fonctions méromorphes (1).

Étant donnée une fonction méromorphe $f(x)$, il existe au

(1) Toutes les fois qu'on emploie l'adjectif *méromorphe* sans indiquer de domaine, il s'agit d'une fonction méromorphe partout à distance finie.

plus deux valeurs a et b telles que les équations

$$f(x) - a = 0, \qquad f(x) - b = 0$$

n'aient pas de racines.

Une fonction méromorphe prend toute valeur finie ou infinie sauf *deux au plus.*

Soit $f(x)$ une fonction méromorphe ayant *trois* valeurs exceptionnellement distinctes a, b et c; on peut les ramener à être ∞, 0 et 1 par la transformation homographique

$$g(x) = \frac{c-a}{c-b}\,\frac{f(x)-b}{f(x)-a};$$

$g(x)$ est une fonction entière ayant les valeurs exceptionnelles 0 et 1; on est ramené au cas précédent.

Les fonctions entières rentrent dans cet énoncé en regardant ∞ comme une valeur quelconque : une fonction entière ayant déjà la valeur exceptionnelle ∞ ne peut en avoir qu'une autre au maximum.

Exemples. — e^x a les deux valeurs exceptionnelles ∞ et 0; $\sin x$ a une seule valeur exceptionnelle ∞.

On a cherché à démontrer ce théorème par une voie élémentaire, c'est-à-dire sans faire appel aux propriétés d'une fonction transcendante spéciale. M. Hadamard y est parvenu en 1892 pour une certaine catégorie de fonctions entières; et M. Borel en 1895 a donné une démonstration générale fondée sur la théorie de la croissance; cet ordre d'idées étant tout différent, nous nous contentons d'y renvoyer le lecteur.

20. **Théorèmes de MM. Landau et Carathéodory.** — *Théorème de M. Landau. — Soit*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

une série entière convergente et ne prenant pas les valeurs 0 *et* 1 *dans un cercle de rayon* R (ce qui implique $a_0 \neq 0$ et $a_0 \neq 1$); *si l'on suppose en outre*

$$a_1 \neq 0,$$

R *ne peut dépasser une certaine fonction de* a_0 *et de* a_1 *seuls*

$$R \leq \varphi(a_0, a_1).$$

Si l'on considère, en d'autres termes, toutes les séries entières dans lesquelles les deux premiers coefficients sont donnés, satisfaisant à

$$a_0 \neq 0, \qquad a_0 \neq 1, \qquad a_1 \neq 0,$$

les autres coefficients restant arbitraires, il existe un nombre $\varphi(a_0, a_1)$ tel que dans tout cercle de rayon plus grand, toute fonction de la famille ait ou un point singulier, ou un zéro, ou un point où elle est égale à un.

M. Landau a d'abord obtenu son théorème en reprenant la démonstration de M. Borel, et en resserrant les inégalités. Il l'a démontré ensuite par la théorie de la fonction modulaire.

Considérons la fonction $f(x)$ du premier énoncé, et formons $\nu[f(x)]$; c'est une fonction uniforme, et holomorphe dans le cercle de rayon R (exactement pour la même raison que dans la démonstration de M. Picard). Envisageons alors la fonction

$$\Omega(x) = \omega[f(x)] = \frac{\nu[f(x)] - \nu(a_0)}{\nu[f(x)] - \overline{\nu(a_0)}},$$

$\nu(a_0)$ étant la détermination choisie à l'origine pour la fonction ν. Cette fonction est holomorphe dans le cercle de rayon R, et de plus

$$|\Omega(x)| < 1 \quad \text{pour} \quad |x| < R,$$

Ces inégalités permettent d'avoir une limite pour les coefficients de la série de Taylor de $\Omega(x)$. Le premier est nul, car

$$\Omega(0) = 0.$$

Le suivant A_1 est donné par

$$A_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Omega(x)\, dx}{x^2}.$$

Prenons un cercle C de rayon $R - \varepsilon$, on en déduit

$$|A_1| < \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(R - \varepsilon)} 2\pi(R - \varepsilon) = \frac{1}{R - \varepsilon}.$$

Ceci étant vrai quel que soit ε, on a

$$|A_1| \leqq \frac{1}{R} \qquad \text{ou} \qquad R \leqq \frac{1}{|A_1|}.$$

Il suffit donc de calculer A_1 en fonction des coefficients de la série $f(x)$ pour avoir une limite supérieure de R dépendant de ces coefficients,

$$A_1 = \Omega'(0).$$

Or

$$\Omega'(x) = \omega'[f(x)]f'(x),$$

$$A_1 = \omega'(a_0)\,a_1,$$

$$\omega'(z) = \frac{\nu'(z)[\nu(z) - \overline{\nu(a_0)}] - [\nu(z) - \nu(a_0)]\nu'(z)}{[\nu(z) - \overline{\nu(a_0)}]^2}$$

$$= \frac{\nu'(z)[\nu(a_0) - \overline{\nu(a_0)}]}{[\nu(z) - \overline{\nu(a_0)}]^2},$$

$$\omega'(a_0) = \frac{\nu'(a_0)}{\nu(a_0) - \overline{\nu(a_0)}} = \frac{\nu'(a_0)}{2\delta\nu(a_0)},$$

$$A_1 = \frac{a_1\nu'(a_0)}{2\delta\nu(a_0)},$$

d'où la limite cherchée

$$R \leqq \frac{2\delta\nu(a_0)}{|a_1||\nu'(a_0)|}.$$

La détermination choisie pour $\nu(a_0)$ a-t-elle une influence sur la limite ci-dessus ? Nous savons que tout autre branche s'exprime à l'aide de la première par une substitution du groupe modulaire

$$N = \frac{\alpha\nu + \beta}{\gamma\nu + \delta}.$$

Le calcul fait n° 12 montre que

$$\delta N = \frac{\delta\nu}{(\gamma\nu + \delta)(\overline{\gamma\nu} + \delta)}.$$

D'ailleurs

$$N' = \frac{\alpha\nu'(\gamma\nu + \delta) - (\alpha\nu + \beta)\gamma\nu'}{(\gamma\nu + \delta)^2} = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)\nu'}{(\gamma\nu + \delta)^2} = \frac{\nu'}{(\gamma\nu + \delta)^2};$$

donc

$$|N'| = \frac{|\nu'^2|}{|\gamma\nu + \delta|^2} = \frac{|\nu'|}{(\gamma\nu + \delta)(\overline{\gamma\nu} + \delta)},$$

$$\frac{\delta N}{|N'|} = \frac{\delta\nu}{|\nu'|}.$$

La limite est donc indépendante de la branche considérée.

21. *Théorème de M. Carathéodory.* — Tout autre mode de démonstration conduisant à une expression différente, M. Carathéodory s'est demandé quelle était la *limite exacte*, c'est-à-dire la plus petite des fonctions que l'on peut adopter pour $\varphi(a_0, a_1)$ dans l'énoncé. C'est lui qui a donné la valeur précédente

$$\varphi(a_0, a_1) = \frac{2\delta v(a_0)}{|a_1||v'(a_0)|}$$

et qui a montré qu'elle était exacte (alors que la première valeur trouvée indépendamment de la fonction modulaire ne l'est pas). Cela montre que l'intervention de cette fonction transcendante est bien dans la nature de la question.

Il s'agit de voir que l'inégalité

$$|A_1 R| \leq 1,$$

établie par le raisonnement précédent, peut pour certaines fonctions se réduire à l'égalité

$$|A_1 R| = 1.$$

A_1 était le premier coefficient de Taylor de la fonction

$$\Omega(x) = A_1 x + A_2 x^2 + \dots,$$

$A_1 R$ est donc le premier coefficient de la fonction

$$\Omega_0(\xi) = \Omega(R\xi) = A_1 R\xi + A_2 R^2 \xi^2 + \dots$$

obtenue en posant $x = R\xi$, fonction holomorphe à l'intérieur du cercle de rayon 1, et vérifiant l'inégalité

$$|\Omega_0(\xi)| \leq 1.$$

Nous pouvons lui appliquer un lemme de M. Schwarz.

22. *$f(\xi)$ étant une fonction nulle à l'origine, holomorphe et de module plus petit que 1 dans le cercle de rayon 1, son module est moindre que celui de ξ en tout point intérieur, ou lui est égal dans le cas où la fonction est linéaire.*

Autrement dit, de

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad |f(\xi)| \leq 1 \qquad \text{pour} \qquad |\xi| \leq 1,$$

on conclut

$$|f(\xi)|<|\xi| \qquad \text{pour} \qquad |\xi|<1,$$

sauf si

$$f(\xi)=e^{i\theta}\xi, \qquad \text{alors} \qquad |f(\xi)|=|\xi|.$$

En effet, la fonction $\frac{f(\xi)}{\xi}$ est holomorphe dans le cercle de rayon 1 puisque $f(\xi)$ s'annule à l'origine ; une fonction holomorphe atteint le maximum de son module sur le contour d'un domaine; sur la circonférence, on a

$$|f(\xi)|\leq 1, \qquad |\xi|=1;$$

donc

$$\left|\frac{f(\xi)}{\xi}\right|\leq 1.$$

On a donc à l'intérieur

$$\left|\frac{f(\xi)}{\xi}\right|<1,$$

égalité exclue, c'est-à-dire

$$|f(\xi)|<|\xi|.$$

Il n'y a que dans le cas où la fonction est une constante que le maximum du module est atteint à l'intérieur; on a alors

$$\frac{f(\xi)}{\xi}=A \qquad \text{ou} \qquad f(\xi)=A\xi,$$

l'inégalité ci-dessus n'est transformée en égalité que si

$$|A|=1.$$

C. Q. F. D.

23. Ce lemme nous conduit à distinguer deux cas :

1° *Cas général.* — $\Omega_0(\xi)$ n'est pas linéaire, alors A_1R étant la valeur à l'origine de $\frac{\Omega_0(\xi)}{\xi}$, on a, sans égalité possible,

$$|A_1R|<1;$$

2° *Cas particulier :*

$$\Omega_0(\xi)=e^{i\theta}\xi,$$

alors dans tout l'intérieur du cercle $\frac{\Omega_0(\xi)}{\xi}$ a pour module 1, et

$$|A_1R|=1.$$

La limite trouvée est donc bien atteinte par R; cela a lieu quand la fonction $f(x)$ est telle que

$$\Omega_0(\xi) = \Omega(R\xi) = e^{i\theta}\xi$$

ou

$$\Omega(x) = \omega[f(x)] = \frac{e^{i\theta}}{R}x.$$

Or, nous avons étudié, à la fin du Chapitre précédent (n° 18), l'inversion de la fonction ω; on peut identifier $f(x)$ et $\frac{e^{i\theta}}{R}x$ respectivement avec z et w; donc

$$f(x) = \chi\left(\frac{e^{i\theta}}{R}x\right).$$

C'est la fonction étudiée à la fin de ce Chapitre (transformée par homothétie de façon à être définie dans le cercle de rayon R, et avec une rotation arbitraire). Nous savons que, à l'intérieur du cercle, elle est holomorphe et différente de 0 et de 1, et qu'en outre, la circonférence est une coupure essentielle (*a priori*, on devait affirmer qu'il y aurait sur cette circonférence au moins un point singulier, ou un zéro, ou un point où la fonction est égale à un).

24. *Remarques.* — I. L'hypothèse $a_1 \neq 0$ n'a rien d'essentiel pour l'énoncé du théorème; si, après le terme constant, un certain nombre de coefficients sont nuls, il suffit de considérer le premier terme qui figure effectivement.

Si la fonction

$$f(x) = a_0 + a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \dots \qquad (a_n \neq 0)$$

ne prend dans le cercle de rayon R, où elle est holomorphe, ni la valeur 0, ni la valeur 1 (donc $a_0 \neq 0$, $a_0 \neq 1$), on a

$$R \leq \Phi(a_0, a_n).$$

Il suffit de considérer dans le développement de Taylor de $\Omega(x)$ le premier coefficient non nul, et d'en évaluer une limite par l'intégrale de Cauchy.

Dans

$$\Omega(x) = \frac{\nu[f(x)] - \nu(a_0)}{\nu[f(x)] - \overline{\nu(a_0)}},$$

le numérateur s'annule à l'origine, et le dénominateur est différent de o. On a

$$\nu(z) = \nu(a_0) + (z - a_0)\frac{\nu'(a_0)}{1} + (z - a_0)^2 \frac{\nu''(a_0)}{2!} + \dots,$$

$$\nu[f(x)] - \nu(a_0) = (a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots)\frac{\nu'(a_0)}{1} + (a_n x^n + \dots)^2 \frac{\nu''(a_0)}{2!} + \dots = a_n \nu'(a_0) x^n + \dots.$$

Donc

$$\Omega(x) = \frac{a_n \nu'(a_0)}{\nu(a_0) - \overline{\nu(a_0)}} x^n + \dots,$$

le premier coefficient non nul est donc

$$A_n = \frac{a_n \nu'(a_0)}{2\delta\nu(a_0)}.$$

Par application de l'intégrale de Cauchy, on trouve

$$|A_n| \leq \frac{1}{R^n}, \qquad \text{d'où} \qquad R \leq \frac{1}{\sqrt[n]{|A_n|}},$$

$$\Phi(a_0, a_n) = \sqrt[n]{\frac{2\delta\nu(a_0)}{|a_n||\nu'(a_0)|}}.$$

H. M. Hartogs a donné une interprétation géométrique de la limite $\frac{2\delta\nu(a_0)}{|a_1||\nu'(a_0)|}$.

La fonction $\nu(z)$ exprime le rapport des périodes d'une intégrale elliptique en fonction du carré du module (ou du rapport anharmonique des quatre racines du polynome). Si l'on adopte la forme canonique de Weierstrass, on a trois racines e_1, e_2, e_3 satisfaisant à

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0.$$

En prenant

$$\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = a_0,$$

on aura donc

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \nu(a_0).$$

En appelant Q l'aire du parallélogramme des périodes

$$(2\Omega_1, 2\Omega_2),$$

on a

$$\varphi(a_0, a_1) = \frac{2Q}{\pi} |e_1 - e_2| \left| \frac{a_0}{a_1} \right| \quad (1).$$

III. Le premier théorème de M. Picard découle immédiatement du théorème de M. Landau. Nous savons qu'il suffit d'établir l'impossibilité des deux valeurs exceptionnelles 0 et 1 pour une fonction entière. Soit la fonction entière

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

où

$$a_0 \neq 0 \qquad \text{et} \qquad a_0 \neq 1.$$

Si l'on a en outre

$$a_1 \neq 0$$

dans le cercle de rayon $R = \varphi(a_0, a_1)$, la fonction a ou un point singulier, ou un zéro, ou une racine de $f(x) - 1 = 0$; la première hypothèse étant à rejeter pour une fonction entière, il faut qu'elle prenne ou la valeur 0 ou la valeur 1.

Si $a_1 = 0$, et si $f(x)$ n'est pas une constante, on trouvera un coefficient $a_n \neq 0$ et par suite un cercle de rayon $R = \Phi(a_0, a_n)$ dans lequel on aura la même conclusion.

25. **Théorème de M. Schottky.** — Ce théorème a été trouvé par son auteur en cherchant une démonstration élémentaire du second théorème de M. Picard qui fera l'objet de la section suivante (2). C'est en se guidant sur les inégalités de M. Borel que ce résultat a été obtenu; nous le rattacherons à la fonction modulaire.

La fonction

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

étant holomorphe dans le cercle de rayon R, *et n'y prenant ni la valeur* 0, *ni la valeur* 1, *quel que soit le nombre* θ *compris entre* 0 *et* 1, *pour*

$$|x| \leq \theta R,$$

(1) Pour tous les développements se rattachant à ce théorème, *voir* E. LANDAU, *Ueber den Picard'schen Satz* (*Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, Band LI, 1906).

(2) Cette démonstration sort de notre cadre, comme celle du premier théorème par M. Borel. *Voir* GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, t. II, 3e édition, note.

on a nécessairement

$$|f(x)| \leq M(a_0, \theta).$$

Si l'on préfère, le fait que la fonction est holomorphe, et différente de o et de 1 dans le cercle R, permet, d'assigner une limite supérieure à son module dans le cercle θR, limite ne dépendant de $f(x)$ que par son terme constant a_0 et dépendant d'autre part de θ.

Considérons, comme dans la démonstration de M. Carathéodory, n° **21**, la fonction $\Omega_0(\xi)$, et appliquons-lui le lemme de M. Schwarz.

Pour $|\xi| < 1$,

$$|\Omega_0(\xi)| \leq |\xi|.$$

Soit θ un nombre satisfaisant à

$$o \leq \theta < 1.$$

Pour $|\xi| \leq \theta$,

$$|\Omega_0(\xi)| \leq \theta.$$

Revenons à la variable $x = R\xi$; l'inégalité

$$|x| \leq \theta R$$

entraîne

$$|\Omega(x)| \leq \theta, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad |\omega[f(x)]| \leq \theta.$$

Lorsque le point représentatif de x est dans le cercle θR, le point représentatif de $w = \omega[f(x)]$ est dans le cercle θ. Cherchons à en déduire dans quelle région est le point $z = f(x)$. Nous passerons par l'intermédiaire de $t = \nu[f(x)]$. Nous savons que la relation entre w et t est

$$w = \frac{t - \nu(a_0)}{t - \overline{\nu(a_0)}},$$

elle fait correspondre à un cercle un cercle. Géométriquement d'ailleurs, en marquant sur le plan t les points P et Q d'affixes respectives $\nu(a_0)$ et $\overline{\nu(a_0)}$, et en appelant M le point t, on voit bien que

$$|w| = \theta, \qquad |w| < \theta$$

se traduisent respectivement par

$$\frac{MP}{MQ} = \theta, \qquad \frac{MP}{MQ} < \theta,$$

c'est-à-dire une circonférence et le cercle intérieur.

Ce cercle n'empiète que sur un nombre fini de quadrilatères $\mathfrak{D}$, et ne contient aucun sommet (correspondant à un point de ramification de la surface de Riemann z). Nous avons vu au Chapitre précédent qu'une telle aire est représentée sur le plan z par un domaine Δ qui peut se recouvrir, mais qui reste à distance finie. La fonction $f(x)$ a donc pour borne supérieure la plus grande distance de l'origine à un point de Δ; cette plus grande distance dépend donc seulement de la fonction modulaire et du cercle obtenu précédemment sur le plan t, cercle défini complètement par a^0 qui fixe P et Q et par θ. On a donc bien

$$|f(x)| < \mathrm{M}(a_0, \theta).$$

26. Ce théorème appelle un complément naturel : partant du fait que la fonction $f(x)$ ne prend dans le cercle R aucune des valeurs ∞, 0, 1, nous en avons conclu une limite pour la distance de $f(x)$ à ∞ lorsque x reste dans le cercle θR; les distances aux points 0 et 1 doivent être de même limitées inférieurement. On aurait pu l'affirmer en remarquant que le domaine Δ reste à une certaine distance des points 0 et 1, mais on peut exprimer ces limites à l'aide de la même fonction M. En effet, limiter inférieurement le module $f(x)$, c'est limiter supérieurement celui de $\frac{1}{f(x)}$; cette dernière fonction remplit les conditions du théorème, son terme constant est $\frac{1}{a_0}$; on a donc

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| \leqq \mathrm{M}\left(\frac{1}{a_0}, \theta\right) \quad \text{ou} \quad |f(x)| \geqq \frac{1}{\mathrm{M}\left(\frac{1}{a_0}, \theta\right)}.$$

Pareillement, la considération de $\frac{1}{1-f(x)}$ donne

$$\left|\frac{1}{1-f(x)}\right| \leqq \mathrm{M}\left(\frac{1}{1-a_0}, \theta\right) \quad \text{ou} \quad |f(x)-1| \geqq \frac{1}{\mathrm{M}\left(\frac{1}{1-a_0}, \theta\right)}.$$

27. *Extension.* — Les limites qui précèdent s'appliquent à toutes les fonctions qui, ne devenant jamais égales à 0, 1, ∞, ont la même valeur a_0 à l'origine. On peut considérer des fonctions pour lesquelles a_0 a des valeurs différentes, nécessairement toutes finies et différentes de 0 et de 1; il suffit de supposer que a_0 ne s'approche

pas des valeurs exclues pour avoir une limite applicable à toutes ces fonctions. ε étant choisi arbitrairement, considérons toutes les valeurs de a_0 telles que

$$|a_0| \leqq \frac{1}{\varepsilon}, \qquad |a_0| \leqq \varepsilon, \qquad |a_0 - 1| \leqq \varepsilon.$$

Pour chacune d'elles, le cercle du plan t considéré n° 25 a une certaine position. En réalité, ce cercle est défini par l'intermédiaire de $\nu(a_0)$, si l'on fait décrire à a_0 un chemin fermé entourant les points critiques, ce qui est possible ici, ce cercle peut revenir à une position différente de sa situation initiale, mais alors ces deux positions se correspondent par une substitution du groupe modulaire ; ce changement n'a donc pas d'influence sur le domaine Δ du plan z; on peut donc se borner à considérer un cercle pour chaque valeur de a_0. L'ensemble de ces cercles balaye une aire finie à laquelle correspond pour z un domaine ayant le même caractère que Δ. On peut donc conclure :

$$|f(x)| < \mathfrak{M}(\varepsilon, \theta), \qquad |f(x)| > \frac{1}{\mathfrak{M}(\varepsilon, \theta)}, \qquad |f(x) - 1| > \frac{1}{\mathfrak{M}(\varepsilon, \theta)}.$$

28. *Remarques.* — Ce théorème contient comme cas particulier ceux qui font l'objet des deux sections précédentes.

I. Soit $f(x)$ une fonction entière ayant les valeurs exceptionnelles 0 et 1. On peut lui appliquer le théorème de M. Schottky dans un cercle de rayon arbitraire R. On en conclut que pour

$$|x| \leqq \theta R,$$

on a

$$|f(x)| \leqq M(a_0, \theta).$$

Prenant pour θ une valeur numérique quelconque, $\frac{1}{2}$ pour fixer les idées, $\frac{1}{2}R$ est une quantité arbitraire, on a donc, quelle que soit la valeur de x,

$$|f(x)| \leqq M\left(a_0, \frac{1}{2}\right),$$

c'est-à-dire que le module de $f(x)$ est borné dans tout le plan. D'après le théorème de Liouville, cette fonction est une constante.

II. Reprenons l'hypothèse du théorème de M. Schottky, et

faisons-en l'application avec une valeur particulière de θ, $\frac{1}{2}$ par exemple. Pour

$$|x| < \frac{R}{2},$$

on a

$$|f(x)| \leq M\left(a_0, \frac{1}{2}\right).$$

Nous pouvons tirer de là une limitation pour les coefficients de $f(x)$; en effet, C désignant le cercle de rayon $\frac{R}{2}$, on a

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(x)\,dx}{x^{n+1}},$$

d'où

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi}\,\frac{M\left(a_0, \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{R}{2}\right)^{n+1}}\,2\pi\,\frac{R}{2} = \frac{2^n M\left(a_0, \frac{1}{2}\right)}{R^n}$$

et, par suite,

$$R^n \leq \frac{2^n M\left(a_0, \frac{1}{2}\right)}{|a_n|},$$

$$R \leq 2\sqrt[n]{\frac{M\left(a_0, \frac{1}{2}\right)}{|a_n|}}.$$

Cette inégalité limite donc le rayon R du cercle dans lequel peut être réalisée l'hypothèse actuelle (fonction holomorphe, ne prenant pas les valeurs 0 et 1), en fonction des coefficients a_0 et a_n ($a_0 \neq 0$, $a_0 \neq 1$, $a_n \neq 0$). C'est une généralisation du théorème de M. Landau. Il est presque évident que notre limite actuelle n'est pas exacte puisqu'on en aurait une autre en donnant à θ une valeur numérique autre que $\frac{1}{2}$.

29. **Théorème général de M. Picard.** — Nous avons parlé du *second théorème de M. Picard* au Chapitre I, pour montrer comment il complète le théorème de Weierstrass sur l'indétermination d'une fonction au voisinage d'un point essentiel. Rappelons-en l'énoncé.

Si la fonction $f(x)$ est uniforme autour du point x_0 et l'admet pour point singulier essentiel isolé, il existe au plus

deux valeurs a et b telles que les équations

$$f(x) - a = 0 \qquad \text{et} \qquad f(x) - b = 0$$

n'aient pas de racine dans un cercle de centre x_0 et de rayon convenable.

Dans cet énoncé, ∞ doit être considéré comme un nombre ordinaire, une racine de

$$f(x) - \infty = 0$$

signifiant un pôle de $f(x)$ (¹).

Au voisinage d'un point singulier essentiel isolé, une fonction prend en une infinité de points toute valeur finie ou infinie, sauf peut-être deux *valeurs exceptionnelles*.

La démonstration donnée par M. Picard, et que nous allons reproduire avec quelques simplifications de détail, est une démonstration par l'absurde, comme celle du premier théorème. On suppose que la fonction $f(x)$, possédant x_0 comme point singulier essentiel isolé, admet autour de ce point *trois* valeurs exceptionnelles a, b, c; on peut les ramener à être ∞, 0 et 1 par une transformation homographique sur la fonction

$$g(x) = \frac{c-a}{c-b}\,\frac{f(x)-b}{f(x)-a}$$

(une transformation linéaire remplit ce but si ∞ est déjà l'une des valeurs exceptionnelles).

Supposons donc une fonction $f(x)$ holomorphe dans un cercle C de centre x_0, sauf en x_0, et telle que les équations

$$f(x) = 0, \qquad f(x) - 1 = 0$$

n'aient pas de racine à l'intérieur de C. La fonction

$$G(x) = \nu[f(x)]$$

est définie et régulière en tout point de C autre que le centre. Si l'on part d'un point x_1 avec une détermination choisie arbitrairement, la fonction sera définie en tout point x par prolongement le

---

(¹) Em. Picard, *Sur les fonctions analytiques uniformes dans le voisinage d'un point singulier essentiel* (*C. R. Acad. Sc.*, t. LXXXIX, 1879, p. 745).

long d'un chemin continu allant de x_1 à x. La différence entre ce cas et celui du premier théorème consiste dans le domaine sur lequel porte l'hypothèse et qui est seulement le cercle C; le point x_0 étant exclu puisque $f(x)$ n'y est pas défini, le domaine où $G(x)$ est définie est doublement connexe (c'est une couronne dont le petit cercle a un rayon nul, mais reste néanmoins comme obstacle à la déformation continue des chemins); deux chemins entre x_0 et x_1 ne pourront pas toujours se ramener l'un à l'autre, et l'on ne peut pas affirmer que la fonction $G(x)$ soit uniforme. Les différents chemins ne peuvent d'ailleurs différer les uns des autres que par des circulations autour de x_0; autrement dit, x_0 est le seul point critique. Il suffit de considérer l'effet d'une circulation autour de ce point sur la fonction

$$G(x) = \nu[f(x)].$$

$f(x)$ étant uniforme, on passera d'une branche de la fonction ν à une autre. La nouvelle valeur est donc liée à l'ancienne par une substitution du groupe modulaire

$$(S) \qquad G_1(x) = \frac{\alpha G(x) + \beta}{\gamma G(x) + \delta},$$

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1; \qquad \alpha \equiv 1, \qquad \beta \equiv 0, \qquad \gamma \equiv 0, \qquad \delta \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod}\, 2).$$

Nous allons envisager successivement les différents cas qui se produisent suivant la catégorie à laquelle appartient (S); dans chacun d'eux, nous ferons apparaître une contradiction à laquelle aboutit l'ensemble de nos hypothèses.

30. Premier cas : *Substitution identique.* — La fonction $G(x)$ est alors uniforme dans C, et elle est holomorphe sauf peut-être en x_0 qui peut être soit point singulier essentiel, soit pôle, soit point régulier.

Il est impossible que ce soit un point singulier essentiel, car $G(x)$ s'approcherait de toute valeur, contrairement à l'inégalité

$$\Im G(x) > 0.$$

Ce ne peut pas être davantage un pôle, car au voisinage d'un pôle, une fonction prend toutes les valeurs de module suffisamment grand. C'est une conséquence de la continuité des racines : la

fonction $\frac{1}{G(x)}$ serait régulière en x_0 et l'on aurait

$$\frac{1}{G(x_0)} = 0,$$

l'équation

$$\frac{1}{G(x)} - u = 0 \qquad \text{ou} \qquad G(x) = \frac{1}{u}$$

admet alors p racines x pour u assez petit, si p est l'ordre du pôle.

La même contradiction se présenterait en supposant x_0 point régulier et $G(x_0)$ réel. Si l'on a

$$G(x_0) - \Gamma = 0,$$

l'équation

$$G(x) - u = 0$$

aura des racines voisines de x_0 pour u suffisamment voisin de Γ.

La propriété

$$\Im G(x) > 0$$

ne nous laisse donc qu'une hypothèse possible : $G(x)$ est régulière en x_0 et $G(x_0)$ est dans le demi-plan supérieur (et pas sur la frontière). En faisant l'inversion de la relation entre $f(x)$ et $G(x)$, on voit que

$$f(x) = \lambda[G(x)].$$

$G(x_0)$ est un point où la fonction λ est régulière, $f(x)$ serait elle-même bien déterminée et régulière en x_0.

31. Deuxième cas : *Substitution hyperbolique.* — Elle se ramène à la forme réduite (H) du n° 12 (le lecteur verra aisément que toute substitution modulaire qui admet ∞ pour point double est parabolique) :

$$\frac{G_1(x) - a}{G_1(x) - b} = K \frac{G(x) - a}{G(x) - b},$$

a et b étant les points doubles réels et K une constante réelle positive. $G(x)$ ne devenant jamais réelle, il en est de même de

$$\frac{G(x) - a}{G(x) - b};$$

en particulier cette fonction n'est jamais nulle, ni infinie; la fonction

$$\log \frac{G(x) - a}{G(x) - b}$$

est donc définie en tout point de C sauf x_0 ; elle admettra ce dernier point pour point critique, et une circulation autour de ce point la remplacera par

$$\log\frac{G_1(x)-a}{G_1(x)-b}=\log K+\log\frac{G(x)-a}{G(x)-b},$$

c'est-à-dire l'augmentera d'une constante (d'ailleurs réelle). Il est alors plus aisé de former une autre fonction qui soit uniforme autour de x_0 :

$$\frac{2\pi i}{\log K}\log\frac{G(x)-a}{G(x)-b}$$

augmente de $2\pi i$; donc

$$P(x)=e^{\frac{2\pi i}{\log K}\log\frac{G(x)-a}{G(x)-b}}$$

est uniforme dans C, et holomorphe partout ailleurs qu'en x_0.

Cherchons à voir quelle peut être la nature de ce dernier point; pour cela, évaluons le module de $P(x)$:

$$|P(x)|=e^{\mathcal{R}\left[\frac{2\pi i}{\log K}\log\frac{G(x)-a}{G(x)-b}\right]},$$

$$\log\frac{G(x)-a}{G(x)-b}=\log\left|\frac{G(x)-a}{G(x)-b}\right|+i\arg\frac{G(x)-a}{G(x)-b},$$

$$\mathcal{R}\left[\frac{2\pi i}{\log K}\log\frac{G(x)-a}{G(x)-b}\right]=-\frac{2\pi}{\log K}\arg\frac{G(x)-a}{G(x)-b},$$

$$|P(x)|=e^{-\frac{2\pi}{\log K}\arg\frac{G(x)-a}{G(x)-b}}.$$

Nous avons dit que le point $\frac{G(x)-a}{G(x)-b}$ restait d'un même côté de l'axe réel; son argument reste donc compris entre deux multiples de π consécutifs; on le voit aussi en l'interprétant comme l'angle qui a son sommet au point $G(x)$ dans le demi-plan supérieur, et dont les côtés passent par les points fixes a et b de l'axe réel; on voit donc que

$$e^{\frac{2h\pi^2}{-\log K}}<|P(x)|<e^{\frac{(2h+1)\pi^2}{-\log K}}.$$

x_0 ne peut donc être ni point essentiel, ni pôle pour $P(x)$; c'est un point régulier, et la valeur $P(x_0)$ a son module compris entre ces deux limites positives, elle n'est donc pas nulle. Il s'ensuit que

$$\frac{2\pi i}{\log K}\log\frac{G(x)-a}{G(x)-b}=\log P(x)$$

est régulière autour de x_0, et par suite aussi :

$$\log\frac{G(x)-a}{G(x)-b}=\frac{\log K}{2\pi i}\log P(x),$$

$$\frac{G(x)-a}{G(x)-b}=e^{\frac{\log K}{2\pi i}\log P(x)}.$$

Cette dernière fonction est uniforme autour de x_0 et il en est de même de $G(x)$; c'est contraire à l'hypothèse de la substitution hyperbolique dans laquelle nous nous sommes placés.

32. Troisième cas : *Substitution parabolique.* — Elle se ramène à l'une des formes (P_1) ou (P) du n° 12.

1° Supposons d'abord le point double unique à l'infini :

$$G_1(x)=G(x)+K,$$

K étant réel (c'est même un entier pair dans une substitution modulaire). Suivant l'idée précédente, nous formons la fonction

$$P(x)=e^{\frac{2\pi i}{|K|}G(x)},$$

qui est uniforme autour de x_0; calculons son module

$$|P(x)|=e^{-\frac{2\pi}{|K|}\Im G(x)}.$$

Comme

$$\Im G(x)>0,$$

on aura

$$|P(x)|<1.$$

x_0 ne peut être pour $P(x)$ qu'un point régulier et la valeur $P(x_0)$ est moindre que 1 en module. Si elle n'est pas nulle, le logarithme sera uniforme autour de x_0, et aussi

$$G(x)=\frac{|K|}{2\pi i}\log P(x),$$

ce qui est à rejeter comme dans le deuxième cas. Nous sommes donc obligés de supposer

$$P(x_0)=0.$$

Séparons le réel de l'imaginaire dans $G(x)$:

$$G(x) = \frac{|K|}{2\pi i}\log|P(x)| + \frac{|K|}{2\pi i}\, i \arg P(x),$$

$$G(x) = \frac{|K|}{2\pi}\arg P(x) \quad + i\,\frac{|K|}{2\pi}\log\frac{1}{|P(x)|}.$$

x_0 étant un zéro de $P(x)$, l'argument de cette fonction varie lorsqu'on tourne autour de ce point, c'est pour cela que $G(x)$ n'est pas uniforme. Introduisons une coupure artificielle joignant le centre à la circonférence de C; dans le domaine ainsi modifié, l'argument de $P(x)$ ne variera plus qu'entre deux limites réelles α et β. Le point d'affixe $G(x)$ sur le plan t restera donc entre les deux parallèles à l'axe imaginaire

$$\Re t = \alpha, \qquad \Re t = \beta.$$

Faisons tendre maintenant x vers x_0, $|P(x)|$ tend vers zéro, $\frac{1}{|P(x)|}$ augmente indéfiniment; on voit sur la formule précédente que $\Im G(x)$ augmente indéfiniment par valeurs positives.

Qu'arrive-t-il pour

$$f(x) = \lambda[G(x)]\,?$$

Nous avons vu en étudiant la fonction modulaire que, si t s'éloigne indéfiniment en restant dans une bande parallèle à l'axe imaginaire, z reste sur un nombre fini de feuillets de la surface de Riemann et tend vers zéro. Autrement dit, on aura

$$|f(x)| < \varepsilon$$

dès que

$$|x - x_0| < \eta.$$

Nous pouvons maintenant supprimer la coupure sans nuire à ce résultat puisque $f(x)$ est uniforme.

On voit que x_0 ne pourrait être pour $f(x)$ qu'un zéro et non pas un point singulier essentiel.

2° Supposons maintenant que le point double soit à distance finie. Dans le groupe modulaire, les substitutions paraboliques ont pour points doubles les points d'abscisse rationnelle, c'est-à-dire les transformés des points ∞, 0, 1, par les substitutions du groupe.

Soient a un tel point et

$$\frac{1}{G_1(x)-a} = \frac{1}{G(x)-a} + K$$

la substitution (K est réel). Considérons alors la fonction

$$P(x) = e^{-\frac{2\pi i}{|K|}\frac{1}{G(x)-a}},$$

elle est uniforme autour de x_0 et a son module borné, comme la précédente

$$|P(x)| = e^{\frac{2\pi}{|K|}\Im\frac{1}{G(x)-a}}.$$

Or

$$\Im[G(x)-a] > 0 \qquad \text{et} \qquad \Im\frac{1}{G(x)-a} < 0,$$

donc

$$|P(x)| < 1.$$

On voit comme précédemment que x_0 doit être un zéro de la fonction $P(x)$, d'où l'on conclut que $\frac{1}{G(x)-a}$ tend vers l'infini en restant entre deux parallèles à l'axe imaginaire. On passe de $\frac{1}{G(x)-a}$ à $G(x)$ par une transformation fuchsienne; cette transformation fait correspondre au point à l'infini le point a, aux deux perpendiculaires à l'axe réel deux circonférences orthogonales à l'axe réel et passant par a (où elles sont tangentes). $G(x)$ tend donc vers a en restant compris entre ces deux circonférences; l'espace qu'elles comprennent au voisinage de a n'empiète que sur un nombre fini de quadrilatères (D, pour lesquels le point a correspond à un même point critique du plan z (0, 1 ou ∞ suivant que a est homologue de ∞, 0 ou 1 par une transformation du groupe).

On en conclut que

$$f(x) = \lambda[G(x)]$$

tend vers 0, 1 ou ∞ quand x tend vers x_0. Il en résulte que x_0 ne peut être qu'un point ordinaire [et alors $f(x_0) = 0$ ou 1] ou un pôle.

Comme il n'existe pas de substitution elliptique dans le groupe modulaire, nous avons épuisé tous les cas possibles.

33. **Complément au théorème sur les fonctions entières.** — Si nous appliquons le second théorème de M. Picard à une fonction entière, dont le point singulier est à l'infini, nous arrivons à la conclusion suivante, qui généralise le premier théorème :

Si, *à l'extérieur d'un cercle de rayon convenable*, la fonction a deux valeurs exceptionnelles a et b, le point à l'infini n'est pas singulier essentiel.

Cette hypothèse est réalisée si les équations

$$f(x) - a = 0, \qquad f(x) - b = 0$$

n'ont dans tout le plan qu'un nombre fini de racines. Alors $f(x)$ se réduit à un polynome.

CHAPITRE III.

LES FAMILLES NORMALES DE FONCTIONS.

34. Introduction. — Nous nous proposons l'étude des valeurs que prend une fonction $f(z)$ au voisinage d'un point singulier essentiel isolé, que nous pouvons toujours ramener à l'origine pour simplifier l'écriture.

Considérons une circonférence C de centre O et de rayon R, et un nombre σ de module plus petit que 1. En multipliant par σ les affixes des points de C, nous obtenons les nombres dont le module est $R|\sigma|$ et qui sont représentés géométriquement par une circonférence que nous convenons de désigner par $C\sigma$. C'est une conséquence naturelle de l'assimilation des points du plan aux nombres complexes, qui nous les fait déjà désigner par une seule et même lettre.

Construisons donc les circonférences

$$C,\ C\sigma,\ C\sigma^2,\ \ldots,\ C\sigma^n,\ \ldots.$$

Le voisinage de O est constitué par l'ensemble des couronnes comprises entre les circonférences consécutives, et que nous désignerons par

$$\Gamma_0(C,\ C\sigma),\quad \Gamma_1(C\sigma,\ C\sigma^2),\quad \ldots,\quad \Gamma_n(C\sigma^n,\ C\sigma^{n+1}),\quad \ldots.$$

Nous pouvons remplacer l'étude de $f(z)$ dans chacune de ces couronnes par celle d'une autre fonction dans la couronne Γ_0. En effet, substituons à z la variable σz, nous obtenons la fonction

$$f_1(z) = f(\sigma z);$$

lorsque σz est dans Γ_1, z est dans Γ_0; les valeurs que prend $f(z)$ dans Γ_1 sont donc celles que prend $f_1(z)$ dans Γ_0.

Pareillement, posons

$$f_n(z) = f(\sigma^n z);$$

pour que $\sigma^n z$ soit dans Γ_n, il faut et il suffit que z soit dans Γ_0; il revient au même de considérer $f(z)$ dans Γ_n ou $f_n(z)$ dans Γ_0.

Nous avons donc ramené l'étude de $f(z)$ au voisinage du point O à celle de la *famille de fonctions*

$$f(z),\ f_1(z),\ f_2(z),\ \ldots,\ f_n(z),\ \ldots$$

dans la couronne Γ_0. C'est l'idée fondamentale que nous appliquerons dans la suivante et qui justifie la digression que nous allons faire.

35. Historiquement, ce n'est pas le problème actuel qui a fait naître l'étude des familles de fonctions. Ce sont au contraire les résultats acquis dans cette voie qui ont conduit M. Montel à une nouvelle démonstration des théorèmes du Chapitre précédent.

Indiquons rapidement les étapes successives parcourues dans l'étude des suites convergentes de fonctions holomorphes. Dans ce qui suit, nous considérons toujours une suite de fonctions

$$(S) \qquad f_1(z),\ f_2(z),\ \ldots,\ f_n(z),\ \ldots$$

holomorphes dans un domaine Δ, connexe, limité par *un* ou *plusieurs* contours C.

1° *Si cette suite converge uniformément dans tout domaine Δ' intérieur à Δ, la limite est une fonction holomorphe de l'intérieur de Δ* (mais pas nécessairement sur la frontière C). Cela résulte de l'énoncé suivant connu sous le nom de « théorème de Weierstrass ».

2° *Si cette suite converge uniformément sur le contour* C, *elle converge dans Δ vers une fonction holomorphe.* C'est une conséquence presque immédiate de l'intégrale de Cauchy. Appelons z un point de C, et x un point de Δ situé à une distance de C supérieure à une longueur λ arbitraire (1). Soit $f(z)$ la limite de

(1) On peut considérer un cercle de rayon λ dont le centre décrit C; il balaie ainsi une partie du domaine Δ; x doit être choisi dans la partie non balayée Δ_1.

la suite (S) sur C (1). On a

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(z)\,dz}{z-x}.$$

Posons, d'autre part,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

d'où il résulte

$$f(x) - f_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{[f(z) - f_n(z)]\,dz}{z-x}.$$

Par suite de la convergence uniforme sur C, ε étant donné, on peut lui faire correspondre un entier p tel que, pour

$$n \geq p,$$

on ait

$$|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon.$$

En désignant par L la longueur du contour C, on a par suite

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon}{\lambda}\,\mathrm{L}.$$

Le second membre de cette inégalité est arbitrairement petit; cela signifie que $f_n(x)$ tend uniformément vers $f(x)$ dans le domaine Δ_1 où x a été choisi. Cette fonction est d'ailleurs holomorphe dans ce domaine, d'après la formule même qui la définit.

Pour en déduire le premier énoncé, il suffit d'appliquer ce résultat à un contour C, tracé dans Δ et aussi près qu'on veut du contour C.

3° En 1894, Stieltjes a démontré que *si, dans le domaine* Δ, *les modules des fonctions* $f_n(z)$ *sont bornés dans leur ensemble, et si, dans une aire* D *intérieure à* Δ, *la suite* (S) *converge uniformément, elle converge uniformément dans toute aire* Δ' *intérieure à* Δ (vers une fonction holomorphe d'après le 1°) (2).

4° M. Vitali en 1904 et M. Porter en 1905 ont montré que *pour*

(1) Cette fonction n'est définie que sur C; cette notation ne doit pas faire croire qu'il s'agit des valeurs sur C d'une fonction analytique.

(2) *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*, t. II, lettres nos 399 et 400, p. 368; et T. Stieltjes, *Recherches sur les fractions continues* (*Ann. de la Fac. de Toulouse*, 1894).

des fonctions $f_n(z)$ bornées en module dans leur ensemble, la convergence de (S) *en une infinité de points ayant au moins un point limite à l'intérieur de* Δ *suffit à assurer la convergence uniforme dans toute aire* Δ' *intérieure à* Δ (1).

5° Enfin, en 1911, MM. Landau et Carathéodory ont obtenu le même résultat en remplaçant l'hypothèse que les fonctions sont bornées par la suivante : *dans le domaine* Δ, *aucune des fonctions* $f_n(z)$ *ne prend deux certaines valeurs a et b.*

36. **Les familles normales de fonctions holomorphes.** — *Définition.* — Avant de définir une famille normale, nous avons besoin d'étendre un peu la notion de convergence uniforme. Nous dirons que la suite

$$(S) \qquad f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots$$

converge uniformément vers l'infini si, à tout nombre positif arbitraire A, on peut faire correspondre un entier p tel que l'inégalité

$$n \geq p$$

entraîne

$$|f_n(z)| > A$$

pour toutes les valeurs de z du domaine considéré. On peut encore dire que les fonctions $f_n(z)$ convergent uniformément vers l'infini si les fonctions $\frac{1}{f_n(z)}$ convergent uniformément vers la constante *zéro*. Pour les énoncés 1° et 2° de la section précédente, que nous aurons à utiliser ici, il est évident d'après la démonstration qu'on suppose la convergence uniforme vers une limite finie.

Rappelons qu'on appelle *domaine fermé* l'ensemble des points intérieurs et des points de la frontière, et *domaine ouvert* l'ensemble des points intérieurs seuls. Nous aurons souvent à parler d'une propriété qui a lieu dans tout domaine fermé Δ_1 intérieur à un domaine ouvert Δ; nous dirons alors qu'elle a lieu *à l'intérieur de* Δ. Pour bien montrer la signification de ces diffé-

(1) G. Vitali, *Sopra le serie di funzioni analitiche* (*Rend. del R. Ist. Lombardo*, 2e série, t. XXXVI, 1903, p. 772, et *Annali di Matematica*, 3e série, t. X, 1904, p. 73). — H. Porter, *Concerning series of analytic fonctions* (*Annals of Mathematics*, 2e série, t. VI, 1904-1905, p. 190).

rentes expressions, considérons la fonction $\frac{1}{z^2-1}$ qui a pour pôles les points $+1$ et -1, et le cercle Δ décrit sur le segment $(+1, -1)$ comme diamètre. Cette fonction n'est pas régulière en tout point du domaine fermé Δ, mais elle l'est en tout point du domaine ouvert. Elle n'est pas bornée dans le domaine ouvert Δ (car il y a à l'intérieur du cercle des points assez voisins des pôles pour que le module soit aussi grand qu'on veut); mais elle est bornée à l'intérieur de Δ (parce que, en prenant l'origine pour centre et un rayon plus petit que 1, on obtient un cercle Δ_1 où la fonction est holomorphe jusque sur la circonférence).

Étant donnée une famille de fonctions $f(z)$, holomorphes à l'intérieur du domaine Δ, on dit que c'est une *famille normale dans ce domaine* si, de toute suite infinie

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots$$

de fonctions appartenant à la famille, on peut extraire une suite nouvelle convergeant uniformément dans l'intérieur de Δ. Elle peut converger uniformément vers une limite finie, cette limite sera alors (d'après l'énoncé 1° du n° 35) une fonction holomorphe pouvant se réduire à une constante finie; elle peut aussi tendre uniformément vers l'infini.

On dit que la famille est *normale en un point* P du domaine ouvert Δ si elle est normale dans un cercle de centre P [1]. Il est évident qu'une famille normale dans Δ est normale en tout point P du domaine ouvert Δ. La réciproque est vraie.

En effet, soit Δ' un domaine fermé intérieur à Δ; tout point de Δ' est centre d'un cercle C dans lequel la famille est normale; d'après le théorème de Borel-Lebesgue, on peut recouvrir tout Δ' avec un nombre fini de ces cercles [2] :

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_p.$$

---

[1] De toute suite infinie de fonctions $f(x)$, on peut alors extraire une autre suite convergeant uniformément dans tout cercle intérieur au premier. En attachant au point P un cercle convenable, il sera donc loisible de supposer que la convergence uniforme est réalisée dans le domaine ouvert formé par ce cercle.

[2] Ce théorème est énoncé et démontré pour le cas des ensembles linéaires de points dans Borel, *Leçons sur les fonctions variables réelles*, Chap. I, p. 9.

Considérons une suite infinie de fonctions $f(z)$:

$$(S) \qquad f_1(z),\ f_2(z),\ \ldots,\ f_n(z),\ \ldots,$$

on peut en extraire une suite convergeant uniformément dans C_1 :

$$f_1^1(z),\ f_2^1(z),\ \ldots\ f_n^1(z),\ \ldots.$$

De celle-ci, on peut en extraire une autre convergeant uniformément dans C_2, et par suite dans C_1 et C_2, soit

$$f_1^2(z),\ f_2^2(z),\ \ldots,\ f_n^2(z),\ \ldots.$$

En continuant de la sorte, on arrivera à la suite

$$(\Sigma) \qquad f_1^p(z),\ f_2^p(z),\ \ldots,\ f_n^p(z),\ \ldots$$

qui convergera uniformément dans

$$C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_p,$$

c'est-à-dire dans Δ'.

Il n'est pas encore établi par là que la famille est normale dans Δ; car étant donnée la suite (S), nous en avons extrait la suite (Σ) connaissant le domaine Δ' qui est intervenu par les cercles

$$C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_p.$$

La suite (Σ), extraite de (S), uniformément convergente dans Δ', change avec ce domaine; tandis que dans la définition d'une famille normale, on doit extraire de (S) une seule autre suite qui sera uniformément convergente dans tout domaine tel que Δ'.

Appelons Δ_k la partie de Δ située à une distance de la frontière supérieure à $\frac{1}{k}$ [1]. On peut extraire de (S) une suite (Σ_1) uniformément convergente dans Δ_1 :

$$(\Sigma_1) \qquad f_1^{(1)}(x),\ f_2^{(1)}(x),\ \ldots,\ f_n^{(1)}(x),\ \ldots.$$

Appliquons le premier résultat à la suite (Σ_1) de fonctions de la famille, et en faisant jouer à Δ_2 le rôle de Δ'; nous aurons une suite

$$(\Sigma_2) \qquad f_1^{(2)}(x),\ f_2^{(2)}(x),\ \ldots,\ f_n^{(2)}(x),\ \ldots$$

---

[1] *Voir* n° 35, note [1], un mode de génération de ce domaine Δ_k.

de fonctions appartenant déjà à (Σ_{k-1}), et qui converge uniformément dans Δ_2. En continuant ainsi, on définira une infinité de suites

$$(\Sigma_k) \qquad f_1^{(k)}(x),\ f_2^{(k)}(x),\ \ldots,\ f_n^{(k)}(x),\ \ldots$$

chacune tirée de la précédente et uniformément convergente dans le domaine Δ_k correspondant à son indice.

Prenons alors la *suite diagonale*

$$f_1^{(1)}(x),\ f_2^{(2)}(x),\ \ldots,\ f_n^{(n)}(x),\ \ldots$$

Elle est extraite de (S), et uniformément convergente dans le domaine Δ_k, puisque les fonctions qui la composent sont, après le rang k, extraites de la suite (Σ_k). Ceci étant vrai quel que soit k, la convergence uniforme a lieu dans tout domaine intérieur à Δ (un tel domaine est en effet intérieur à Δ_k pour k suffisamment grand).

37. **Application à la convergence des suites.** — 1° *Étant donnée une suite infinie*

$$(S) \qquad f_1(z),\ f_2(z),\ \ldots,\ f_n(z),\ \ldots$$

dont les termes appartiennent à une famille normale de fonctions holomorphes dans un domaine Δ, *si elle converge en une infinité de points ayant au moins un point limite intérieur à* Δ, *elle converge dans tout le domaine.*

Supposons qu'au point x de Δ, la suite (S) ne soit pas convergente; la suite des valeurs numériques

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

aurait au moins *deux* points limites distincts α et β, et l'on pourrait en extraire deux suites partielles convergeant respectivement vers ces deux limites :

$$f_{n_1}(x),\ f_{n_2}(x),\ \ldots,\ f_{n_q}(x),\ \ldots \to \alpha,$$
$$f_{p_1}(x),\ f_{p_2}(x),\ \ldots,\ f_{p_q}(x),\ \ldots \to \beta.$$

De chacune des suites de fonctions de la famille

$$f_{n_1}(z),\ f_{n_2}(z),\ \ldots,\ f_{n_q}(z),\ \ldots,$$
$$f_{p_1}(z),\ f_{p_2}(z),\ \ldots,\ f_{p_q}(z),\ \ldots,$$

on peut extraire une suite uniformément convergente à l'intérieur de Δ :

$$f_{n'_1}(z),\quad f_{n'_2}(z),\quad \ldots,\quad f_{n'_q}(z),\quad \ldots,$$
$$f_{p'_1}(z),\quad f_{p'_2}(z),\quad \ldots,\quad f_{p'_q}(z),\quad \ldots.$$

Chacune d'elles a pour limite une fonction holomorphe ou une constante finie ou infinie. Ce ne peut être la constante infinie, puisqu'en chacun des points $z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots$, où (S) converge par hypothèse, chacune de ces suites a pour limite la limite de (S). Nous avons donc deux fonctions holomorphes $f(z)$ et $g(z)$ respectivement. La fonction $f(z) - g(z)$ est aussi holomorphe, et l'on a

$$f(z_1) - g(z_1) = 0,$$
$$f(z_2) - g(z_2) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f(z_k) - g(z_k) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Elle a donc une infinité de zéros admettant le point limite P intérieur à Δ; ou bien elle admet P comme point singulier, ce qui est contradictoire avec l'holomorphie dans le domaine Δ, ou bien elle est identiquement nulle, ce qui est contradictoire avec

$$\alpha \neq \beta \qquad \text{ou} \qquad f(x) \neq g(x).$$

La suite (S) ne peut donc avoir qu'une limite unique en chaque point de Δ, c'est-à-dire qu'elle converge dans Δ.

2° *Si la suite infinie*

$$(S) \qquad f_1(z),\quad f_2(z),\quad \ldots,\quad f_n(z),\quad \ldots$$

de fonctions holomorphes, appartenant à une famille normale dans Δ, *converge dans ce domaine, la convergence est uniforme à l'intérieur de* Δ.

Soit Δ_1 un domaine intérieur à Δ, et supposons que la convergence de (S) ne soit pas uniforme dans Δ_1. Dans ce cas, étant donné un certain nombre ε, il serait impossible de lui faire correspondre un entier p tel que l'on ait

$$|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon \qquad \text{pour} \qquad n \geq p,$$

quel que soit z dans Δ_1 (¹). Donc à ce nombre ε et à chaque entier p, on peut faire correspondre au moins un entier $n \geq p$ et un point z de Δ_1 mettant l'inégalité précédente en défaut.

ε étant choisi, à l'unité correspondent n_1 et z_1 tels que

$$|f(z_1) - f_{n_1}(z_1)| \geq \varepsilon.$$

A $n_1 + 1$ correspondent z_2 et $n_2 \geq n_1 + 1$, tels que

$$|f(z_2) - f_{n_2}(z_2)| \geq \varepsilon$$

et ainsi de suite. On aura en général

$$|f(z_p) - f_{n_p}(z_p)| \geq \varepsilon.$$

Considérons alors la suite

$$f_{n_1}(z), \quad f_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad f_{n_p}(z), \quad \ldots.$$

On peut en extraire une suite partielle uniformément convergente dans Δ_1 :

$$f_{n_\alpha}(z), \quad f_{n_\beta}(z), \quad \ldots, \quad f_{n_\lambda}(z), \quad f_{n_\mu}(z), \quad \ldots.$$

Au nombre ε correspond un rang à partir duquel on a, quel que soit z dans Δ_1 :

$$|f(z) - f_{n_\lambda}(z)| < \varepsilon,$$
$$|f(z) - f_{n_\mu}(z)| < \varepsilon,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les points z_λ, z_μ, ... étant dans Δ_1, ces inégalités sont contradictoires avec une infinité de celles qui précèdent. La supposition dont nous sommes partis est donc inadmissible.

38. **Les familles de fonctions bornées dans leur ensemble.** — Théorème fondamental. — *Si des fonctions holomorphes dans un domaine* Δ *ont leurs modules bornés dans leur ensemble à l'intérieur de* Δ, *elles forment une feuille normale dans* Δ.

Ce premier criterium a été connu avant l'étude systématique

(¹) $f(z)$ désigne la limite de la suite (S) en chaque point z, sans préjuger aucunement de sa nature. C'est l'uniformité de la convergence, une fois démontrée, qui permet d'affirmer l'holomorphie de $f(z)$.

des familles normales et l'introduction de cette expression (¹). Il permet d'affirmer que la famille est normale, si à tout domaine Δ_1 intérieur à Δ correspond un nombre M tel que l'on ait

$$|f(z)| < M$$

quelle que soit la fonction f de la famille et quel que soit le point z du domaine fermé Δ_1.

Prenons d'abord le cas où le domaine Δ est un cercle, dont nous supposerons le centre à l'origine pour simplifier l'écriture; Δ_1 sera un cercle concentrique de rayon plus petit R. Chaque fonction de la famille est développable en série de Taylor dans ce cercle :

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_p z^p + \ldots.$$

Les coefficients pouvant se calculer par l'intégrale de Cauchy le long de ce cercle, on a

$$|a_p| < \frac{M}{R^p},$$

cette limite s'appliquant, comme M, à toutes les fonctions de la famille. Soit

$$(S) \qquad f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots$$

une suite de fonctions de la famille. Nous poserons en général

$$f_n(z) = a_0^n + a_1^n z + a_2^n z^2 + \ldots + a_p^n z^p + \ldots.$$

Considérons la suite des termes constants de ces fonctions :

$$a_0^1, \quad a_0^2, \quad \ldots, \quad a_0^n, \quad \ldots.$$

Les points représentatifs de ces nombres sont à l'intérieur d'un cercle de rayon M puisque $|a_0^n| < M$; ils ont donc au moins un point limite dans ce cercle ou sur la circonférence. On peut donc extraire de la suite précédente une suite partielle

$$(o) \qquad a_0^{n_1}, \quad a_0^{n_2}, \quad a_0^{n_3}, \quad \ldots$$

convergeant vers A_0 tel que

$$|A_0| \leq M.$$

(¹) MONTEL, *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe*, Chap. I, p. 22.

Considérons, dans les fonctions correspondantes

$$f_{n_1}(z), \quad f_{n'_1}(z), \quad f_{n''_1}(z), \quad \ldots,$$

les coefficients de z; ils forment la suite

$$a_1^{n_1}, \quad a_1^{n'_1}, \quad a_1^{n''_1}, \quad \ldots$$

bornée en module à $\frac{M}{R}$. Pour la même raison que ci-dessus, on peut en extraire une suite partielle

$$(1) \qquad a_1^{n_2}, \quad a_1^{n'_2}, \quad a_1^{n''_2}, \quad \ldots$$

ayant pour limite un nombre A_1 tel que

$$|A_1| \leq \frac{M}{R}.$$

Dans les fonctions correspondantes, on prendra les coefficients de z_2, et l'on opérera de même, et ainsi de suite indéfiniment. D'après le procédé employé, la suite (p)

$$(p) \qquad a_p^{n_{p+1}}, \quad a_p^{n'_{p+1}}, \quad a_p^{n''_{p+1}}, \quad \ldots$$

sera convergente et aura pour limite un nombre A_p tel que

$$|A_p| \leq \frac{M}{R^p},$$

les indices supérieurs

$$n_{p+1}, \quad n'_{p+1}, \quad n''_{p+1}, \quad \ldots$$

étant d'ailleurs extraits de ceux qui figuraient dans la suite $(p-1)$

$$n_p, \quad n'_p, \quad n''_p, \quad \ldots.$$

Considérons alors la suite des fonctions

$$(\Sigma) \qquad f_{n_1}(z), \quad f_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad f_{n_p}(z), \quad \ldots.$$

Les termes constants de ces fonctions

$$a_0^{n_1}, \quad a_0^{n_2}, \quad \ldots, \quad a_0^{n_p}, \quad \ldots$$

figurent dans la suite (0), et par suite convergent vers A_0.

Les coefficients de z

$$a_1^{n_1}, \quad a_2^{n_2}, \quad \ldots, \quad a_1^{n_p}, \quad \ldots$$

font partie, à partir du second, de la suite (1), donc ils tendent vers A_1. En général, les coefficients de z^p

$$a_p^{n_1}, \quad a_p^{n_2}, \quad \ldots, \quad a_p^{n_p}, \quad a_p^{n_{p+1}}, \quad \ldots$$

appartiennent, à partir du $(p+1)^{\text{ième}}$, à la suite (p); ils ont donc A_p pour limite.

Formons alors la fonction

$$F(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_p z^p + \ldots;$$

elle est majorée par la série

$$M + \frac{M}{R} z + \frac{M}{R^2} z^2 + \ldots + \frac{M}{R^p} z^p + \ldots = \frac{M}{1 - \frac{z}{R}},$$

elle est donc holomorphe à l'intérieur du cercle Δ_1. Nous allons montrer qu'elle est la limite de la suite (Σ) :

$$F(z) - f_{n_p}(z) = \left[S_q(z) - s_q^{n_p}(z) \right] + R_q(z) - r_q^{n_p}(z)$$

en posant

$$S_q(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_{q-1} z^{q-1},$$
$$R_q(z) = A_q z^q + A_{q+1} z^{q+1} + \ldots,$$

et en désignant par $s_q^{n_p}$ et $r_q^{n_p}$ les expressions analogues relatives à $f_{n_p}(z)$.

D'après les limites supérieures trouvées pour les coefficients, la série

$$M + M \frac{z}{R} + M \frac{z^2}{R^2} + \ldots + M \frac{z^p}{R^p} + \ldots$$

est majorante pour toutes les fonctions de la famille, ainsi que pour $F(z)$.

Si nous considérons seulement les valeurs de z telles que

$$|z| \leqq \rho < R,$$

on aura

$$|R_q(z)| \leqq \frac{M\left(\frac{\rho}{R}\right)^q}{1 - \frac{\rho}{R}} \qquad \text{et} \qquad |r_q^{n_p}(z)| \leqq \frac{M\left(\frac{\rho}{R}\right)^q}{1 - \frac{\rho}{R}}.$$

Cette dernière inégalité a lieu, quel que soit l'indice n_p. Il est

donc possible de choisir q de façon qu'on ait à la fois

$$|R_q(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{et} \qquad |r_q^{n_p}(z)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

L'entier q une fois choisi, considérons la différence

$$S_q(z) - s_q^{n_p}(z) = (A_0 - a_0^{n_p}) + (A_1 - a_1^{n_p})z + (A_2 - a_2^{n_p})z^2 + \ldots + (A_{q-1} - a_{q-1}^{n_p})z^{q-1}.$$

On a évidemment, pour les valeurs de z considérées,

$$|S_q(z) - s_q^{n_p}(z)| \leq |A_0 - a_0^{n_p}| + |A_1 - a_1^{n_p}|\rho + |A_2 - a_2^{n_p}|\rho^2 + \ldots + |A_{q-1} - a_{q-1}^{n_p}|\rho^{q-1}.$$

Le membre de droite ne dépend plus maintenant que de l'entier p, et il tend vers zéro quand p augmente indéfiniment; on a donc, à partir d'une valeur convenable de p,

$$|S_q(z) - s_q^{n_p}(z)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

En additionnant les inégalités obtenues, on a

$$|F(z) - f_{n_p}(z)| < \varepsilon$$

qui est satisfaite pour

$$|z| < \rho, \qquad p \geq p_0.$$

La suite (Σ) converge donc uniformément vers $F(z)$ à l'intérieur du cercle Δ.

Si nous supposons maintenant que le domaine Δ ait une forme quelconque, tout point intérieur à Δ est centre d'un cercle de rayon non nul et contenu dans Δ; le résultat que nous venons d'obtenir est applicable dans le cercle. La famille donnée est donc normale en tout point du domaine ouvert Δ, et, d'après ce que nous avons vu n° 36, elle est normale dans Δ.

Les théorèmes de Stieltjes et de Vitali-Porter, énoncés n° 35 (3° et 4°), sont des corollaires du théorème actuel. Si les fonctions de la suite

$$(S) \qquad f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots$$

sont bornées dans leur ensemble, elles forment une famille nor-

male. Dès lors, la convergence de (S) en une infinité de points ayant un point limite intérieur à Δ (à plus forte raison, la convergence dans une aire partielle (D), entraîne la convergence dans tout Δ, et l'uniformité de cette convergence à l'intérieur de Δ (n° 37).

39. Nous allons voir maintenant une propriété en quelque sorte réciproque du théorème fondamental :

Si les fonctions holomorphes appartenant à une famille normale dans un domaine Δ *sont bornées en module en un point du domaine ouvert* Δ, *elles sont bornées dans leur ensemble à l'intérieur de* Δ.

Nous supposons qu'au point particulier z_0, toutes les fonctions de la famille satisfassent à une égalité

$$|f(z_0)| < M_0.$$

Δ_1 étant un domaine intérieur à Δ, je dis que les fonctions sont bornées dans leur ensemble dans le domaine Δ_1. Nions en effet cette propriété; cela revient à dire que, quel que soit le nombre positif M, on n'a pas dans tout Δ_1, et pour toutes les fonctions,

$$|f(z)| < M;$$

c'est-à-dire que, pour au moins une fonction de la famille, en un point de Δ_1, on a l'inégalité contraire. En particulier, à chaque entier n, il correspond une fonction $f_n(z)$ et un point z_n tels que

$$|f_n(z_n)| \geq n.$$

La famille étant normale, de la suite

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots,$$

on peut extraire une nouvelle suite

$$f_{n_1}(z), \quad f_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad f_{n_p}(z), \quad \ldots$$

qui converge uniformément dans Δ_1. Les fonctions de la famille étant toutes bornées au point z_0, les fonctions précédentes le sont en particulier, et leur limite ne peut pas être la constante infinie; c'est donc une fonction $F(z)$ holomorphe dans Δ (qui peut se

réduire à une constante finie). Cette fonction est bornée dans Δ_1 :

$$|F(z)| < M_1.$$

Par suite de la convergence uniforme, ε étant choisi, on aura à partir d'une certaine valeur de p :

$$|F(z) - f_{n_p}(z)| < \varepsilon,$$

et par suite

$$|f_{n_p}(z)| < M_1 + \varepsilon.$$

Le membre de droite est un nombre fixe, tandis que les n_p augmentent indéfiniment; il y a donc, à partir d'un certain rang, contradiction avec

$$|f_{n_p}(z_{n_p})| \geq n_p.$$

Notre supposition est donc absurde.

40. On dit que les fonctions d'une famille sont *également continues* si, à tout nombre positif ε, on peut en faire correspondre un autre η, *valable pour toutes les fonctions de la famille*, satisfaisant à la définition habituelle. On distingue l'égale continuité en un point z_0, qui a lieu lorsque l'inégalité

$$|z - z_0| < \eta$$

entraîne l'inégalité

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon;$$

et l'égale continuité dans un domaine fermé Δ, lorsque, z et z' étant deux points du domaine satisfaisant à

$$|z - z'| < \eta,$$

on a

$$|f(z) - f(z')| < \varepsilon.$$

C'est cette dernière notion que nous allons utiliser (1).

Étant donnée une famille normale de fonctions holomorphes dans un domaine Δ, *si elles sont bornées en un point du domaine ouvert* Δ, *elles sont également continues à l'intérieur de* Δ.

L'hypothèse est la même qu'au théorème précédent; et la démonstration sera tout à fait analogue. Dire que l'égale conti-

(1) *Voir* le Mémoire de M. Montel de 1916 (déjà cité) page 231, pour l'égale continuité en un point.

nuité n'a pas lieu dans un domaine fermé Δ_1 intérieur à Δ, c'est dire qu'à un certain ε, il est impossible d'associer un nombre η_1 tel que l'inégalité

$$|z - z'| < \eta_1$$

entraîne

$$|f(z) - f(z')| < \varepsilon.$$

A tout nombre η_1 correspondront donc au moins une fonction de la famille et deux points z et z' pour lesquels on a

$$|z - z'| < \eta_1,$$
$$|f(z) - f(z')| \geq \varepsilon.$$

Appelons $f_n(z)$, z_n, z'_n les éléments relatifs à la valeur $\frac{1}{n}$ de η_1 :

$$|z_n - z'_n| < \frac{1}{n},$$
$$|f_n(z_n) - f_n(z'_n)| \geq \varepsilon.$$

De la suite

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots$$

on peut extraire une suite uniformément convergente dans Δ_1,

$$f_{n_1}(z), \quad f_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad f_{n_p}(z), \quad \ldots$$

et dont la limite sera, pour la même raison que précédemment, une fonction holomorphe $F(z)$. Nous allons faire apparaître une contradiction avec ce qui précède en décomposant la différence

$$f_n(z_n) - f_n(z'_n) = f_n(z_n) - F(z_n) + F(z_n) - F(z'_n) + F(z'_n) - f_n(z'_n),$$

d'où

$$|f_n(z_n) - f_n(z'_n)| \leq |F(z_n) - F(z'_n)| + |F(z_n) - f_n(z_n)| + |F(z'_n) - f_n(z'_n)|.$$

La fonction $F(z)$, étant holomorphe dans le domaine fermé Δ_1, y est uniformément continue; à $\frac{\varepsilon}{3}$ correspond donc δ tel que

$$|z - z'| < \delta$$

entraîne

$$|F(z) - F(z')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Comme on a

$$|z_n - z'_n)| < \frac{1}{n},$$

à partir d'une certaine valeur de n, on aura

$$|F(z_n) - F(z'_n)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Si nous considérons en particulier les valeurs n_p, il résulte de la convergence uniforme que, à partir d'un certain rang, on aura

$$|F(z_{n_p}) - f_{n_p}(z_{n_p})| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{et} \qquad |F(z'_{n_p}) - f_{n_p}(z'_{n_p})| < \frac{\varepsilon}{3},$$

d'où, en fin de compte,

$$|f_{n_p}(z_{n_p}) - f_{n_p}(z'_{n_p})| < \varepsilon.$$

C'est la contradiction que nous voulions obtenir (¹).

41. *Étant donnée une famille normale de fonctions holomorphes $f(z)$ dans un domaine Δ, si ces fonctions sont bornées en module en un point, et si la constante a n'est fonction limite d'aucune suite issue de la famille, le nombre des racines de l'équation*

$$f(z) - a = 0$$

admet, dans l'intérieur de Δ, une limite supérieure valable pour toutes les fonctions de la famille.

Supposons que cela ne soit pas vrai. Dans un domaine Δ_1 intérieur à Δ, il y a des fonctions de la famille pour lesquelles l'équation a un nombre de racines aussi grand qu'on veut.

Soit $f_1(z)$ une fonction pour laquelle l'équation

$$f_1(z) - a = 0$$

a au moins une racine; soit r_1 le nombre de ses racines dans Δ_1; soit $f_2(z)$ une fonction pour laquelle il y a au moins $r_1 + 1$ racines, et exactement r_2; $f_3(z)$ sera une fonction donnant au moins $r_2 + 1$ racines et ainsi de suite.

De la suite

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots,$$

(¹) Nous avons donné cette démonstration à cause de son analogie avec la précédente. A la page 492 du Mémoire de 1912, déjà cité, M. Montel établit l'égale continuité très simplement à partir de l'intégrale de Cauchy.

on peut extraire une suite partielle uniformément convergente

$$f_{n_1}(z),\quad f_{n_2}(z),\quad \ldots,\quad f_{n_p}(z),\quad \ldots.$$

La fonction limite de cette suite ne peut pas être infinie puisque les fonctions de la famille sont bornées; ce n'est pas non plus la constante a par hypothèse. Soit $F(z)$ cette fonction, holomorphe dans le domaine fermé Δ_1; l'équation

$$F(z) - a = 0$$

a donc, dans ce domaine, un nombre fini de racines; soient z_1, z_2, ..., z_k les racines distinctes, d'ordres respectifs α_1, α_2, ..., α_k. Soient γ_1, γ_2, ..., γ_k des cercles ayant pour centres les points z_1, z_2, ..., z_n, intérieurs à Δ_1 et extérieurs deux à deux; appelons Δ_2 la partie de Δ_1 extérieure à tous ces cercles. La fonction $F(z) - a$ ne s'annulant pas dans le domaine fermé Δ_2, son module y admet une borne inférieure non nulle

$$|F(z) - a| \geq m.$$

Si nous nous donnons un nombre $\varepsilon < m$ $\left(\frac{m}{2}\text{ si l'on veut}\right)$, on aura

$$|F(z) - f_{n_p}(z)| < \varepsilon$$

dans tout Δ_1, pour

$$p \geq q;$$

d'où il résulte

$$|f_{n_p}(z) - a| > m - \varepsilon$$

pour ces valeurs de p, z étant dans Δ_2. L'équation

$$f_{n_p}(z) - a = 0$$

n'a donc aucune racine dans Δ_2 pour

$$p \geq q.$$

Considérons maintenant un cercle γ_k; le nombre des racines de cette équation situées dans ce cercle est donné par la variation de l'argument de $f_{n_p}(z) - a$, divisée par 2π, lorsqu'on fait décrire à z la circonférence γ_k. Il est aisé de comparer cette variation d'argument à celle de $F(z) - a$. En effet,

$$\frac{f_{n_p}(z) - a}{F(z) - a} = 1 + \frac{f_{n_p}(z) - F(z)}{F(z) - a}.$$

La circonférence γ_h fait partie de la frontière de Δ_2; on a donc, d'après ce qui précède,

$$\left|\frac{f_{n_p}(z)-\mathrm{F}(z)}{\mathrm{F}(z)-a}\right|<\frac{\varepsilon}{m} \qquad \text{pour} \qquad p\geq q,$$

z étant sur la circonférence γ_h, le point représentatif du nombre $\frac{f_{n_p}(z)-a}{\mathrm{F}(z)-a}$ reste donc dans un cercle de centre 1 et de rayon $\frac{\varepsilon}{m}<1$; il ne peut pas tourner autour de l'origine; s'il décrit un chemin fermé, la variation de son argument est nulle. La variation d'argument est donc la même pour $f_{n_p}(z)-a$ et pour $\mathrm{F}(z)-a$, et l'équation

$$f_{n_p}(z)-a=0$$

a α_h racines dans γ_h pour

$$p\geq q.$$

Le nombre des racines de cette équation dans Δ_1 est donc

$$\mathrm{N}=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k.$$

Il y a contradiction entre ce nombre fixe et le nombre r_{n_p} croissant indéfiniment avec n_p.

Remarques. — 1° Dans la démonstration précédente, les cercles γ_h étaient arbitrairement petits, et la détermination de l'entier q dépendait de leur choix.

Nous avons donc prouvé que si une suite uniformément convergente de fonctions holomorphes

$$f_1(z),\quad f_2(z),\quad \ldots,\quad f_n(z),\quad \ldots$$

admet pour limite la fonction $f(z)$, les racines de l'équation

$$f_n(z)-a=0$$

tendent, pour n infini vers celles de l'équation

$$f(z)-a=0,$$

une racine d'ordre α de cette dernière étant limite de α racines de la précédente.

2° Si les fonctions $f_n(z)$ ne prennent pas la valeur a, la fonction limite $f(z)$ ne prend pas non plus la valeur a, si c'est une

vraie fonction; si donc elle est égale en un point à a, elle se réduit à la constante a. Cette remarque nous sera souvent utile.

42. Signalons encore la réciproque d'une des propositions précédentes :

Des fonctions holomorphes, également continues dans un domaine Δ, *et bornées en un point intérieur à* Δ, *sont bornées dans leur ensemble dans* Δ, *et, par suite, forment une famille normale.*

Ceci est presque évident parce qu'on peut joindre le point z_0 où les fonctions sont supposées bornées, à tout point z du domaine Δ par un chemin ne sortant pas du domaine et dont la longueur reste inférieure à un nombre fixe L, quel que soit z. A un nombre arbitraire ε correspond le nombre η tel que

$$|z - z'| < \eta$$

entraîne

$$|f(z) - f(z')| < \varepsilon.$$

Sur le chemin $z_0 z$, nous pouvons placer des points z_1, z_2, ..., z_n, distants de moins de η, et dont le nombre sera limité supérieurement par un entier k, à cause de la limite L. Des inégalités

$$|f(z_0)| < M_0.$$
$$|f(z_1) - f(z_0)| < \varepsilon,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$|f(z) - f(z_n)| < \varepsilon,$$

on déduit

$$|f(z)| < M_0 + k\varepsilon,$$

limite applicable à toutes les fonctions de la famille.

43. **Nouveaux critères de familles normales.** — M. Montel a démontré que l'égale continuité suffit pour affirmer que la famille est normale (1). C'est un résultat dont nous n'aurons pas besoin. Il est utile de remarquer que, sous cette forme, la réciproque n'est plus vraie. Une famille normale qui n'est pas bornée peut n'être

(1) *Voir* le Mémoire de 1916, p. 234.

pas également continue. Un exemple très simple est fourni par la famille des fonctions $C\varphi(z)$, $\varphi(z)$ étant une fonction holomorphe dans Δ, et C une constante quelconque. Une suite quelconque de ces fonctions correspond à une suite de valeurs de C; cette dernière admet au moins une limite (finie ou infinie), à laquelle correspond la fonction limite. La famille est donc bien normale. Elle n'est pas également continue, car z et z' étant choisis, on peut prendre C assez grand pour que

$$C\varphi(z) - C\varphi(z') = C[\varphi(z) - \varphi(z')]$$

soit aussi grand que l'on veut.

44. Si les valeurs prises par les fonctions holomorphes $f(z)$ dans le domaine Δ ne recouvrent pas une certaine région du plan complexe, ces fonctions forment une famille normale dans Δ.

Considérons, dans la région non couverte, un cercle; soient a son centre et ρ son rayon. Par hypothèse, on a

$$|f(z) - a| > \rho$$

pour toutes les fonctions $f(z)$ de la famille, et tous les points z de Δ. A chaque fonction $f(z)$, faisons correspondre une fonction $\varphi(z)$ par la transformation homographique

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - a}.$$

Les fonctions $\varphi(z)$ sont holomorphes et bornées :

$$|\varphi(z)| < \frac{1}{\rho};$$

elles forment donc une famille normale.

Donnons-nous alors une suite quelconque de fonctions de la première famille

$$(S) \qquad f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots.$$

Il leur correspond des fonctions $\varphi(z)$ formant la suite

$$(\Sigma) \qquad \varphi_1(z), \quad \varphi_2(z), \quad \ldots, \quad \varphi_n(z), \quad \ldots,$$

d'où l'on peut extraire une nouvelle suite uniformément conver-

gente

$$(\Sigma') \qquad \varphi_{n_1}(z),\ \varphi_{n_2}(z),\ \ldots,\ \varphi_{n_p}(z),\ \ldots.$$

Nous allons montrer que les fonctions $f(z)$ qui leur correspondent forment aussi une suite uniformément convergente.

$$(S') \qquad f_{n_1}(z),\ f_{n_2}(z),\ \ldots,\ f_{n_p}(z),\ \ldots.$$

Remarquons qu'aucune des fonctions $\varphi(z)$ ne prend pas la valeur O dans l'intérieur à Δ.

D'après la remarque 2° (n° 41), la fonction $\Phi(z)$, limite de (Σ'), ne prend pas la valeur O, ou se réduit à la constante O.

Dans le premier cas, soit $F(z)$ la transformée de $\Phi(z)$ par la relation homographique inverse de la précédente :

$$f(z) = a + \frac{1}{\varphi(z)}.$$

On a

$$F(z) - f_{n_p}(z) = \frac{1}{\Phi(z)} - \frac{1}{\varphi_{n_p}(z)} = \frac{\varphi_{n_p}(z) - \Phi(z)}{\Phi(z).\varphi_{n_p}(z)}.$$

Dans un domaine Δ_1, intérieur à Δ, $\Phi(z)$ a une borne inférieure non nulle m :

$$|\Phi(z)| > m.$$

D'autre part, à partir d'un certain rang,

$$p \geq q,$$

on a

$$|\varphi_{n_p}(z) - \Phi(z)| < \varepsilon,$$

d'où l'on tire

$$|\varphi_{n_p}(z)| > m - \varepsilon$$

et enfin

$$|F(x) - f_{n_p}(z)| < \frac{\varepsilon}{m(m-\varepsilon)}.$$

Le second membre de cette inégalité est arbitrairement petit; cela exprime donc bien la convergence uniforme de (Σ') vers $F(z)$.

Dans le cas où la suite (Σ') convergerait vers la constante O, on aurait

$$|\varphi_{n_p}(z)| < \varepsilon \qquad \text{pour} \qquad p \geq q,$$

d'où l'on tire

$$\left|\frac{1}{\varphi_{n_p}(z)}\right| > \frac{1}{\varepsilon}$$

et enfin

$$|f_{n_p}(z)| > \frac{1}{\varepsilon} - |a|.$$

Le membre de droite étant arbitrairement grand, cela exprime la convergence uniforme de (S′) vers la constante infinie.

Dans tous les cas, on peut extraire de (S) une suite (S′) uniformément convergente dans Δ_1 ; le théorème est donc établi.

45. *Si les fonctions holomorphes $f(z)$ ne prennent dans le domaine Δ ni la valeur* 0, *ni la valeur* 1, *ces fonctions forment une famille normale dans Δ.*

Supposons d'abord que le domaine Δ soit simplement connexe. A chaque fonction $f(z)$, associons la fonction

$$\varphi(z) = \nu[f(z)],$$

en choisissant au point particulier z_0 la détermination $\nu[f(z_0)]$ située dans le quadrilatère fondamental ω_0 du Chapitre I. La fonction $\varphi(z)$ est uniforme dans le domaine Δ : en effet, si z décrit un chemin fermé, $f(z)$ décrit dans son plan un chemin fermé ne passant pas par les points 0 et 1 ; en réduisant le premier chemin à un point par déformation continue, le second se réduit à un point par déformation continue, sans jamais rencontrer les points 0 et 1 ; donc, dans sa position initiale, il ne tournait pas autour de ces points, et la fonction $\nu[f(z)]$, suivie par continuité le long de ce chemin, revenait à sa valeur initiale.

Les fonctions $\varphi(z)$ sont donc holomorphes dans Δ; leur coefficient de i est toujours positif; autrement dit, elles laissent découvert le demi-plan inférieur. D'après le théorème précédent, elles forment une famille normale.

Soit alors

$$(S) \qquad f_1(z),\ f_2(z),\ \ldots,\ f_n(z),\ \ldots$$

une suite quelconque de fonctions $f(z)$. Considérons les valeurs de ces fonctions au point z_0 :

$$f_1(z_0),\ f_2(z_0),\ \ldots,\ f_n(z_0),\ \ldots.$$

Cette suite admet, en général, d'autres points limites que ∞,

0, 1; plaçons-nous dans ce cas général, et soit α un tel point limite; c'est la limite unique d'une suite extraite de la précédente :

$$f_{n_i}(z_0),\quad f_{n_i'}(z_0),\quad \ldots,\quad f_{n_p'}(z_0),\quad \ldots \to \alpha.$$

Considérons les fonctions $f(z)$ correspondantes :

$$(S')\qquad f_{n_i}(z),\quad f_{n_i'}(z),\quad \ldots,\quad f_{n_p'}(z),\quad \ldots$$

et les fonctions $\varphi(z)$ associées à ces dernières :

$$(\Sigma')\qquad \varphi_{n_i}(z),\quad \varphi_{n_i'}(z),\quad \ldots,\quad \varphi_{n_p'}(z),\quad \ldots.$$

La famille $\varphi(z)$ étant normale, on peut extraire de (Σ') une suite

$$(\Sigma'')\qquad \varphi_{n_1}(z),\quad \varphi_{n_2}(z),\quad \ldots,\quad \varphi_{n_p}(z),\quad \ldots,$$

uniformément convergente. Les valeurs de ces fonctions au point z_0 sont

$$\varphi_{n_1}(z_0)=\nu[f_{n_1}(z_0)],\qquad \ldots,\qquad \varphi_{n_p}(z_0)=\nu[f_{n_p}(z_0)],\qquad \ldots;$$

les quantités $f_{n_p}(z_0)$ tendent vers α, puisqu'elles sont tirées de la suite qui tend vers α; donc $\varphi_{n_p}(z_0)$ tend vers $\nu(\alpha)$ (détermination principale), puisque α étant différent de ∞, 0, 1, la fonction ν est régulière en α. Il en résulte que la fonction limite de (Σ'') n'est ni la constante infinie, ni une constante réelle. Soit $\Phi(z)$ cette fonction limite; l'inégalité

$$\mathfrak{I}\varphi(z)>0$$

entraîne évidemment

$$\mathfrak{I}\Phi(z)\geqq 0;$$

mais les fonctions $\varphi(z)$ ne prenant aucune valeur réelle à l'intérieur de Δ, $\Phi(z)$ ne peut prendre une telle valeur qu'en se réduisant à cette constante (remarque 2°, n° 41), nous venons de voir que c'est impossible, donc

$$\mathfrak{I}\Phi(z)>0.$$

Si z reste dans un domaine Δ quelconque, intérieur à Δ, les valeurs prises par $\Phi(z)$ formeront un domaine situé dans le demi-plan supérieur, tout entier à distance finie, et restant à une certaine distance de l'axe réel. On peut donc considérer la fonction

$$F(z)=\lambda[\Phi(z)],$$

qui est holomorphe pour $\Phi(z)$ dans ce domaine, c'est-à-dire pour z dans Δ_1.

Il résulte de cette holomorphie que, $\varphi_{n_p}(z)$ tendant uniformément vers $\Phi(z)$, $f_{n_p}(z) = \lambda[\varphi_{n_p}(z)]$ tendra uniformément vers $F(z) = \lambda[\Phi(z)]$. La suite

$$(S'') \qquad f_{n_1}(z),\ f_{n_2}(z),\ \ldots,\ f_{n_p}(z),\ \ldots,$$

extraite de (S), est donc uniformément convergente dans tout domaine Δ_1.

Il nous reste à examiner le cas où la suite

$$f_1(z_0),\ f_2(z_0),\ \ldots,\ f_n(z_0),\ \ldots$$

n'a pas d'autre point limite que ∞, 0, 1. Si 1 est point limite, on en tirera une suite tendant vers l'unité :

$$f_{n_1'}(z_0),\ f_{n_2'}(z_0),\ \ldots,\ f_{n_p'}(z_0),\ \ldots \to 1.$$

Pour chacune des fonctions correspondantes, le logarithme est une fonction uniforme [puisque $f_{n_p'}(z)$ ne prend pas la valeur 0 qui est le point critique]; prenons au point z_0 la détermination principale (correspondant à celui des arguments compris entre $-\pi$ et $+\pi$, et formons la fonction

$$g_{n_p'}(z) = \frac{\log f_{n_p'}(z) + 2\pi i}{4\pi i}.$$

Cette fonction est uniforme, comme le logarithme; elle est régulière en tout point de Δ, car $f_{n_p'}(z)$ ne prend ni la valeur 0, ni la valeur ∞; de plus, $f_{n_p'}(z)$ ne prenant pas la valeur 1, le logarithme ne prend aucune valeur multiple de $2\pi i$, donc $g_{n_p'}(z)$ ne prend pas les valeurs de la forme $\frac{k+1}{2}$ où k est entier. En particulier, elle ne prend pas les valeurs 0 et 1. Au point z_0, la détermination choisie pour le logarithme tend vers zéro pour p infini; donc $g_{n_p'}(z_0)$ tend vers $\frac{1}{2}$. La suite

$$g_{n_1'}(z),\ g_{n_2'}(z),\ \ldots,\ g_{n_p'}(z),\ \ldots$$

est donc dans le cas de la suite (S') de tout à l'heure, avec $\alpha = \frac{1}{2}$.

On peut donc en tirer une nouvelle suite

$$g_{n_1}(z), \quad g_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad g_{n_p}(z), \quad \ldots$$

convergeant uniformément vers une fonction $G(z)$. Comme aucune des fonctions $g(z)$ ne prend la valeur $\frac{1}{2}$, et que $G(z_0) = \frac{1}{2}$, la fonction limite est identique à la constante $\frac{1}{2}$. Comme

$$f_{n_p}(z) = e^{2\pi i[2g_{n_p}(z)-1]} = e^{4\pi i g_{n_p}(z)},$$

ces quantités tendront uniformément vers l'*unité*.

Si la suite

$$f_1(z_0), \quad f_2(z_0), \quad \ldots, \quad f_n(z_0), \quad \ldots$$

n'admettait pas 1 comme point limite, mais admettait zéro, on ramènerait au cas précédent en considérant les fonctions $1 - f_n(z)$; si elle admettait ∞ pour point limite unique, on ramènerait à la limite 1 en prenant les fonctions $1 - \frac{1}{f_n(z)}$. Dans ces deux derniers cas, la limite de la suite uniformément convergente serait la constante *zéro* et la constante *infinie*.

Considérons maintenant le cas où le domaine Δ est limité par plusieurs contours. Tout point du domaine ouvert Δ est centre d'un cercle tout entier intérieur à Δ, auquel le raisonnement précédent s'applique. La famille est donc normale en chaque point de Δ, et par suite normale dans Δ (n° 36).

46. Théorème général. — *Étant données des fonctions holomorphes $f(z)$ dans un domaine Δ, si aucune d'elles ne prend deux valeurs finies distinctes a et b, elles forment une famille normale.*

Ce cas se ramène immédiatement au précédent en posant

$$\varphi(z) = \frac{f(z) - a}{b - a}.$$

Le théorème de Landau-Carathéodory, énoncé n° 35 (5°), découle de celui-ci, comme celui de Vitali-Porter résultait du théorème fondamental sur les familles bornées.

47. **Effet d'une représentation conforme.** — Faisons la représen-

tation conforme d'un domaine Δ du plan z sur un domaine D du plan x; soit

$$z = \varphi(x)$$

la fonction, holomorphe dans D, qui opère cette représentation. Toute fonction $f(z)$, holomorphe dans Δ, se transforme en une nouvelle fonction $f[\varphi(x)] = g(x)$, holomorphe dans D. Une suite de fonctions

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots,$$

convergeant uniformément dans un domaine Δ_1, intérieur à Δ, vers la fonction holomorphe $F(z)$, donnera une suite de fonctions

$$g_1(x), \quad g_2(x), \quad \ldots, \quad g_n(x), \quad \ldots,$$

qui convergera uniformément dans le domaine D_1, homologue de Δ_1, vers la fonction $F[\varphi(x)] = G(x)$. C'est évident puisque les valeurs numériques de deux fonctions $f(z)$ et $g(x)$ correspondantes sont égales aux points homologues. Il en résulte que *la représentation conforme conserve les familles normales.*

48. **Application aux théorèmes du Chapitre précédent.** — Théorème de M. Schottky. — Considérons les fonctions $f(x)$, holomorphes dans un cercle de rayon R, ne prenant dans ce cercle ni la valeur zéro, ni la valeur 1, et ayant au centre (que nous supposons être l'origine) la même valeur a_0. En faisant une représentation conforme du cercle de rayon R sur le cercle Δ de rayon 1, nous obtenons les fonctions $f(Rz) = g(z)$ possédant les mêmes propriétés dans le cercle Δ. Ces fonctions, étant holomorphes et différentes de zéro et de 1, forment une famille normale. Leurs valeurs à l'origine étant toutes égales à a_0 sont bornées; les fonctions considérées sont donc bornées dans leur ensemble à l'intérieur de Δ. A tout cercle Δ_1 de rayon $\theta < 1$, correspondra une borne qui dépendra seulement de a_0 qui définit la famille et de θ qui définit le domaine. On a donc

$$|g(z)| \leqq M(a_0, \theta) \quad \text{pour} \quad |z| \leqq \theta,$$

c'est-à-dire

$$|f(x)| \leqq M(a_0, \theta) \quad \text{pour} \quad |x| \leqq \theta R.$$

Nous avons vu (n° 28) que ce théorème contient le premier

théorème de M. Picard et celui de M. Landau. Ces deux derniers se trouvent donc aussi démontrés par la méthode des familles normales.

49. Second théorème de M. Picard. — Soit $f(z)$ une fonction uniforme admettant un point singulier essentiel isolé, que nous supposons à l'origine. Supposons qu'elle admette *trois* valeurs exceptionnelles distinctes a, b et c, dans le domaine de l'origine. On peut les ramener, comme dans la démonstration de M. Picard, à être ∞, 0, 1. Considérons donc une fonction $f(z)$ qui, en dehors de l'origine, soit holomorphe dans le cercle de rayon R, et n'y prenne ni la valeur zéro, ni la valeur 1.

Soit C la circonférence de rayon R; construisons les couronnes (1)

$$\Gamma_0\left(\mathrm{C},\ \frac{\mathrm{C}}{2}\right),\quad \Gamma_1\left(\frac{\mathrm{C}}{2},\ \frac{\mathrm{C}}{2^2}\right),\quad \ldots,\quad \Gamma_n\left(\frac{\mathrm{C}}{2^n},\ \frac{\mathrm{C}}{2^{n+1}}\right),\quad \ldots$$

et formons les fonctions

$$f_1(z)=f\left(\frac{z}{2}\right),\qquad f_2(z)=f\left(\frac{z}{2^2}\right),\qquad \ldots,\qquad f_n(z)=f\left(\frac{z}{2^n}\right),\qquad \ldots$$

Les valeurs de la fonction $f_n(z)$ dans la couronne Γ_0 sont celles de $f(z)$ dans la couronne Γ_n. Les fonctions

$$f(z),\quad f_1(z),\quad f_2(z),\quad \ldots,\quad f_n(z),\quad \ldots$$

sont donc des fonctions holomorphes ne prenant ni la valeur zéro, ni la valeur 1 dans Γ_0; elles forment donc une famille normale. De la suite précédente, on peut donc en tirer une nouvelle uniformément convergente à l'intérieur de Γ_0 :

$$f_{n_1}(z),\quad f_{n_2}(z),\quad \ldots,\quad f_{n_p}(z),\quad \ldots,\quad \to\ \mathrm{F}(z).$$

Supposons d'abord la fonction limite $\mathrm{F}(z)$ holomorphe à l'intérieur de Γ_0. Sur une circonférence $\mathcal{C}$ dont le rayon $\mathcal{R}$ satisfait à $\frac{\mathrm{R}}{2}<\mathcal{R}<\mathrm{R}$, elle sera bornée en module

$$|\mathrm{F}(z)|<\mathrm{M}\qquad \text{pour}\qquad |z|=\mathcal{R}.$$

La convergence étant uniforme dans un domaine intérieur à Γ_0

(1) *Voir* l'introduction du présent Chapitre, n° 31.

et contenant $\mathcal{C}$, on aura

$$|F(z)-f_{n_p}(z)|<\varepsilon \qquad \text{pour} \qquad p\geq q.$$

Pour ces valeurs de p, on aura donc

$$|f_{n_p}(z)|<M+\varepsilon \qquad \text{pour} \qquad |z|=\mathcal{R},$$

c'est-à-dire

$$\left|f\left(\frac{z}{2^{n_p}}\right)\right|<M+\varepsilon \qquad \text{pour} \qquad |z|=\mathcal{R}.$$

On aura donc

$$|f(z)|<M+\varepsilon,$$

lorsque

$$|z|=\frac{\mathcal{R}}{2^{n_p}}, \qquad p\geq q.$$

La fonction $f(z)$ serait donc bornée en module sur une infinité de circonférences concentriques $\frac{\mathcal{C}}{2^{n_p}}$ tendant vers l'origine. Dans ces conditions, il est impossible que ce point soit singulier (¹).

Si maintenant nous supposons que $F(z)$ soit la constante infinie, il suffira d'envisager la fonction $\frac{1}{f(z)}$ qui satisfait aux mêmes conditions. La suite $\frac{1}{f_{n_p}(z)}$ tendrait vers zéro. L'origine ne serait pas un point singulier pour $\frac{1}{f(z)}$; ce serait même un zéro. $f(z)$ l'admettrait pour pôle et non pas pour point essentiel.

L'existence de trois valeurs exceptionnelles est donc incompatible avec la singularité essentielle.

III. — LES FAMILLES NORMALES DE FONCTIONS MÉROMORPHES.

50. Définitions. — Nous allons d'abord étendre la définition de la convergence uniforme aux fonctions méromorphes.

Soit

$$(S) \qquad f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots$$

une suite de fonctions méromorphes dans un même domaine fermé Δ. Supposons-la convergente en chaque point de Δ, c'est-

(¹) *Voir* Chapitre I, section I, n° 4.

à-dire que la suite numérique relative à chaque point z de Δ ait une limite unique, finie ou infinie $f(z)$. Nous appellerons $f(z)$ la fonction limite de la suite (S) (comme on le voit, le mot fonction est pris ici dans son sens le plus large de nombre complexe attaché à chaque point de Δ; il n'implique ni la monogénéité, ni même la continuité). Nous dirons que la suite (S) converge uniformément vers $f(z)$ dans Δ si chaque point z_0 de Δ est centre d'un cercle que nous appellerons C si $f(z_0)$ est finie et Γ si $f(z_0)$ est infinie, possédant la propriété suivante : à tout nombre positif ε, on peut faire correspondre un entier p tel que, pour $n \geq p$, on ait

$$|f(z)-f_n(z)|<\varepsilon$$

en tout point z appartenant à un cercle C, et

$$\left|\frac{1}{f(z)}-\frac{1}{f_n(z)}\right|<\varepsilon$$

en tout point z appartenant à un cercle Γ.

Si l'on préfère, chaque point de Δ est centre d'un cercle dans lequel l'une des deux suites (S) et

$$(S') \qquad \frac{1}{f_1(z)}, \quad \frac{1}{f_2(z)}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{f_n(z)}, \quad \ldots$$

est uniformément convergente au sens ancien du mot.

D'après le théorème de Borel-Lebesgue (1), on peut couvrir complètement Δ avec un nombre fini des cercles C et Γ: $C_1, C_2, \ldots, C_n, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\nu$. Les cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n$ forment un domaine Δ_1 (qui n'est pas nécessairement d'un seul tenant) dans lequel (S) converge uniformément au sens ancien. Nous savons que la fonction limite $f(z)$ est alors holomorphe (et peut se réduire à une constante finie). De même, les cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\nu$ forment un domaine Δ_2 qui déborde sur Δ_1 et dans lequel (S') converge uniformément au sens ancien. Il en résulte que $\frac{1}{f(z)}$ est holomorphe, et par suite $f(z)$ méromorphe dans ce domaine; $f(z)$ est d'ailleurs infinie aux centres des cercles Γ; elle a donc effectivement des pôles (quand ces cercles existent); si elle se réduit à une cons-

(1) *Voir* la note (2), n° 36.

tante, cette constante est infinie. Par suite de la pénétration des domaines Δ_1 et Δ_2 et de l'unicité de la fonction $f(z)$ supposée dès le début, nous voyons que $f(z)$ ne peut se réduire à une constante que si l'un des domaines n'existe pas.

La notion de famille normale s'étend alors d'elle-même aux fonctions méromorphes : étant données des fonctions $f(z)$, méromorphes à l'intérieur du domaine Δ, elles forment une *famille normale dans ce domaine* si, de toute suite infinie

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots$$

de fonctions de la famille, on peut tirer une suite nouvelle convergeant uniformément à l'intérieur de Δ. Nous savons que la limite sera une fonction méromorphe à l'intérieur de Δ, pouvant se réduire à une fonction holomorphe ou à une constante finie ou infinie.

On dit que la famille est *normale en un point* P du domaine ouvert Δ si elle est normale dans un cercle de centre P. On verrait, en raisonnant comme pour les fonctions holomorphes (n° 36), qu'une famille normale dans Δ est normale en tout point P du domaine ouvert Δ et réciproquement. Nous appliquerons souvent la proposition contraire qui est également vraie : si une famille n'est pas normale dans le domaine Δ, il existe au moins un point P intérieur à Δ où elle n'est pas normale.

51. **Critères de familles normales.** — *Si les valeurs prises par les fonctions méromorphes $f(z)$ dans le domaine Δ ne recouvrent pas une certaine région du plan complexe, ces fonctions forment une famille normale dans Δ.*

La démonstration est tout à fait analogue à celle donnée pour les fonctions holomorphes. Considérons un cercle situé tout entier dans la région non couverte par les valeurs des $f(z)$; soient a son centre et ρ son rayon. On a

$$|f(z) - a| > \rho.$$

Associons, à chaque fonction $f(z)$ de la famille, la fonction $\varphi(z)$ qui s'en déduit par la relation homographique

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - a}.$$

Les fonctions $\varphi(z)$ sont holomorphes et bornées dans Δ :

$$|\varphi(z)| < \frac{1}{\rho};$$

elles forment donc une famille normale.

Nous allons montrer que si des fonctions se correspondent par une relation homographique

$$g(z) = \frac{\alpha f(z) + \beta}{\gamma f(z) + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,$$

les familles $f(z)$ et $g(z)$ sont normales en même temps (1). Il suffit de montrer qu'une suite uniformément convergente se transforme en une suite uniformément convergente.

Tout d'abord, si la suite

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots$$

converge uniformément vers $-\frac{\delta}{\gamma}$, la suite $\frac{1}{g_n(z)}$ converge uniformément vers zéro, et $g_n(z)$ converge uniformément vers l'infini.

Si la fonction limite $F(z)$ n'est pas identique à $-\frac{\delta}{\gamma}$, l'équation

$$F(z) + \frac{\delta}{\gamma} = 0$$

a un nombre fini de racines dans tout domaine Δ_1 contenu dans Δ. On peut entourer tout point z_0 qui n'est pas racine d'un cercle C ne contenant aucune racine; dans C, la suite $g_n(z)$ converge uniformément vers

$$G(z) = \frac{\alpha F(z) + \beta}{\gamma F(z) + \delta}.$$

Cela résulte de l'égalité

$$G(z) - g_n(z) = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)[F(z) - f_n(z)]}{[\gamma F(z) + \delta][\gamma f_n(z) + \delta]} = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)\left[\frac{1}{f_n(z)} - \frac{1}{F(z)}\right]}{\left[\gamma + \frac{\delta}{F(z)}\right]\left[\gamma + \frac{\delta}{f_n(z)}\right]}.$$

Par définition même, la convergence uniforme de $f_n(z)$ vers $F(z)$ signifie que l'un ou l'autre des numérateurs est arbitrairement

(1) Il est à peine utile de faire remarquer que deux fonctions homologues sont méromorphes en même temps.

petit; le premier facteur du dénominateur reste en module supérieur à une quantité fixe d'après le choix de C; il en est de même du second puisqu'il diffère du premier d'une quantité arbitrairement petite comme le numérateur correspondant.

Il reste à considérer les racines z_0 de l'équation

$$F(z) + \frac{\delta}{\gamma} = 0.$$

Elles ne satisfont pas à

$$F(z) + \frac{\beta}{\alpha} = 0.$$

On peut donc entourer chacune d'un cercle C ne contenant pas de racine de la dernière. Alors, la fonction $\frac{1}{g_n(z)}$ tend uniformément vers $\frac{1}{G(z)}$ (au sens ancien), et $g_n(z)$ tend uniformément vers $G(z)$ qui admet ces points z_0 pour pôles.

Théorème général. — *Étant données des fonctions méromorphes $f(z)$ dans un domaine Δ, si aucune d'elles ne prend trois valeurs distinctes a, b et c* (l'une d'elles pouvant être ∞), *elles forment une famille normale.*

Il nous suffit de poser

$$g(z) = \frac{c-a}{c-b}\,\frac{f(z)-b}{f(z)-a}$$

pour faire correspondre à chaque fonction $f(z)$ une fonction $g(z)$ holomorphe et ne prenant pas les valeurs 0 et 1. La famille des $g(z)$ est donc normale et il en est de même des $f(z)$.

52. **Propriétés des familles normales.** — Les propriétés que nous allons étudier sont analogues aux propriétés que nous connaissons pour les familles de fonctions bornées dans leur ensemble.

Étant donnée une famille normale de fonctions méromorphes dans un domaine Δ, si toutes ces fonctions sont bornées en module en un point intérieur à Δ, le nombre des pôles d'une fonction quelconque de la famille est limité à l'intérieur de Δ.

Supposons que cela n'ait pas lieu. Il y aurait des fonctions $f(z)$

de la famille ayant un nombre de pôles arbitrairement grand dans un domaine Δ_1 intérieur à Δ. Soient $f_1(z)$ une fonction ayant des pôles et r_1 le nombre de ces derniers, $f_2(z)$ une fonction ayant au moins r_1+1 pôles et r_2 le nombre de ces pôles, $f_3(z)$ ayant $r_3 \geq r_2+1$ pôles, et ainsi de suite.

De la suite

$$f_1(z),\quad f_2(z),\quad \ldots,\quad f_n(z),\quad \ldots,$$

on peut extraire une suite partielle uniformément convergente. Comme on a, au point z_0,

$$|f(z_0)| < M_0,$$

quelle que soit la fonction $f(z)$, la fonction limite de la suite

$$f_{n_1}(z),\quad f_{n_2}(z),\quad \ldots,\quad f_{n_p}(z)$$

ne peut pas être la constante infinie; c'est donc une fonction méromorphe $F(z)$ qui a dans Δ_1 un nombre fini de pôles $z_1, z_2, \ldots, z_k$ d'ordres respectifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

Prenons chaque point z_h pour centre d'un cercle γ_h, ces cercles étant contenus dans Δ_1, extérieurs deux à deux, et ne contenant pas de zéro de $F(z)$. En dehors de ces cercles, la fonction $F(z)$ étant partout finie, la convergence uniforme a son sens ordinaire. Dans la portion de Δ_1 extérieure aux γ_h, la fonction $F(z)$ étant holomorphe, son module a une borne supérieure finie

$$|F(z)| < M;$$

de plus,

$$|F(z) - f_{n_p}(z)| < \varepsilon$$

à partir d'une certaine valeur de p; donc

$$|f_n(z)| < M + \varepsilon.$$

Les fonctions $f_{n_p}(z)$ n'ont donc pas de pôle en dehors des cercles γ_h. Dans ces cercles, $\frac{1}{f_{n_p}(z)}$ tend uniformément vers $\frac{1}{F(z)}$ (au sens ancien); d'après ce que nous avons vu à propos des fonctions holomorphes, ces fonctions ont le même nombre de zéros pour p assez grand. Donc $f_{n_p}(z)$ a α_h pôles dans γ_h et

$$P = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$$

pôles dans Δ_1, ce qui est contradictoire avec le nombre r_{n_p} qui grandit indéfiniment.

Ainsi, si les fonctions méromorphes $f(z)$ vérifient un point z_0, l'inégalité

$$|f(z_0)| < M_0,$$

c'est-à-dire si, en ce point, elles ne s'approchent pas de ∞, le nombre de leurs pôles, ce que nous appelons le nombre des racines de l'équation

$$f(z) - \infty = 0,$$

est limité supérieurement. Sous cette forme, la propriété se généralise pour une valeur quelconque.

Si les fonctions méromorphes $f(z)$, d'une famille normale dans un domaine Δ, vérifient en un point z_0 intérieur à Δ l'inégalité

$$|f(z_0) - a| > \rho,$$

le nombre des racines de l'équation

$$f(z) - a = 0$$

admet, dans l'intérieur de Δ, une limite supérieure, valable pour toutes les fonctions de la famille.

Il suffit de considérer la famille des fonctions

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - a}.$$

C'est une famille normale de fonctions méromorphes; au point z_0, on a

$$|\varphi(z_0)| < \frac{1}{\rho},$$

d'après le théorème précédent, le nombre des pôles des fonctions $\varphi(z)$ est limité supérieurement; or, les pôles d'une fonction $\varphi(z)$ sont les racines de l'équation

$$f(z) - a = 0$$

correspondante. Le théorème est donc établi.

33. Ce théorème est fort important : il permet de conclure d'une

propriété locale des fonctions $f(z)$ au point z_0 à une propriété générale dans le domaine Δ.

Si les fonctions méromorphes $f(z)$ d'une famille normale dans Δ sont bornées en module en un point z_0 intérieur à Δ, il existe un cercle ayant ce point pour centre et dans lequel aucune des fonctions $f(z)$ n'a de pôle.

La démonstration se fait toujours par l'absurde. Si cela n'était pas vrai, il y aurait des fonctions $f(z)$ ayant des pôles aussi près qu'on veut de z_0. On pourrait donc former une suite de fonctions

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots$$

ayant respectivement pour pôles les points $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, tendant vers le point limite z_0 (par exemple, en appelant z_1 le pôle de $f_1(z)$ le plus rapproché de z_0, on prendra pour $f_2(z)$ une fonction ayant un pôle à une distance de z_0 moindre que $\frac{|z_1 - z_0|}{2}$, et ainsi de suite). De la suite précédente, on peut en extraire une uniformément convergente

$$f_{n_1}(z), \quad f_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad f_{n_p}(z), \quad \ldots \quad \rightarrow \quad \mathrm{F}(z).$$

Au point z_0, d'après l'inégalité

$$|f(z_0)| < \mathrm{M}_0,$$

vérifiée par toutes les fonctions de la famille, on aura

$$|\mathrm{F}(z_0)| \leqq \mathrm{M}_0.$$

La fonction limite $\mathrm{F}(z)$ est donc régulière au point z_0; il existe un cercle C ayant ce point pour centre, et dans lequel elle est holomorphe, et par conséquent bornée,

$$|\mathrm{F}(z)| \leqq \mathrm{M}.$$

La suite étant uniformément convergente, les fonctions $f_{n_p}(z)$ n'auront pas de pôle dans ce cercle (démonstration précédente, n° 52), ce qui contredit le fait que les pôles z_{n_p} ont z_0 pour point limite. Dans ce cercle, les fonctions $f(z)$, étant toutes holomorphes, sont bornées dans leur ensemble. Pour les familles nor-

males de fonctions holomorphes, cela avait lieu dans tout l'intérieur de Δ.

Si les fonctions méromorphes $f(z)$ appartenant à une famille normale vérifient au point z_0 l'inégalité

$$|f(z_0) - a| > \rho,$$

aucune des équations

$$f(z) - a = 0$$

n'a de racine dans un certain cercle autour de z_0.

Les fonctions $\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - a}$ sont, en effet, dans le cas du théorème précédent.

Remarque. — Ces théorèmes peuvent servir de critères pour reconnaître qu'une famille n'est pas normale : si les fonctions d'une famille vérifient l'inégalité

$$|f(z_0) - a| > \rho$$

et si les équations

$$f(z) - a = 0$$

ont des racines aussi nombreuses qu'on veut dans un domaine contenant z_0, la famille n'est pas normale dans ce domaine.

Si ces équations ont des racines aussi près qu'on veut de z_0, la famille n'est pas normale au point z_0.

CHAPITRE IV.

ALLURE D'UNE FONCTION AUTOUR D'UN POINT SINGULIER ESSENTIEL ISOLÉ.

54. Notre but actuel est d'obtenir des renseignements plus précis que le théorème de M. Picard sur une fonction au voisinage d'un point essentiel. Pour cela, au lieu d'un cercle ayant ce point pour centre, nous envisagerons des courbes tendant vers le point singulier, des courbes qui l'entourent, puis des domaines aboutissant au point singulier, en particulier des secteurs ayant ce point pour sommet. La plupart des résultats obtenus dans cette voie sont dus à l'école scandinave.

I. — COURBES TENDANT VERS LE POINT SINGULIER.

55. Considérons une fonction $w = f(z)$ ayant un point singulier essentiel z_0; si l'on fait décrire au point z une courbe continue tendant vers z_0, le point w décrit une courbe continue qui peut tendre vers un point, qui peut se fermer et repasser indéfiniment sur elle-même, qui peut remplir en quelque sorte toute une région du plan (comme les épicycloïdes lorsque la circonférence de base et la roulette ont des rayons incommensurables).

La fonction e^z va nous fournir quelques exemples : si z tend vers l'infini sur l'axe réel positif, e^z tend aussi vers l'infini sur l'axe réel positif; si z décrit l'axe réel négatif, e^z tend vers zéro sur l'axe réel négatif; z décrivant l'axe imaginaire (positif ou négatif), e^z tourne indéfiniment sur le cercle de rayon 1 (dans l'un ou l'autre sens); enfin, si $z = x + iy$ décrit la courbe définie par

$$e^x = a + b\cos\lambda y$$

(qui va à l'infini quand y augmente indéfiniment), e^z décrira la

courbe définie en coordonnées polaires par

$$\rho = a + b\cos\lambda\theta,$$

courbe ondulée comme une sinusoïde entre les circonférences de rayons $a-b$ et $a+b$, et qui remplit en quelque sorte la couronne si λ est irrationnel. Plus exactement, elle passe aussi près qu'on veut d'un point arbitraire de la couronne.

Il est aisé de voir que, pour une fonction quelconque, il existe des chemins tendant vers le point singulier et sur lesquels la fonction prend des valeurs remplissant de la même manière tout le plan (1). Pour plus de simplicité, nous le montrerons pour les fonctions entières et méromorphes dont le point essentiel est à l'infini. Soit $w = f(z)$ la fonction; considérons les nombres rationnels complexes (nombres dont les deux éléments sont rationnels), leur ensemble est énumérable; rangeons-les en une suite linéaire $w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots$, et considérons les équations

$$(1) \qquad f(z) - w_1 = 0,$$
$$(2) \qquad f(z) - w_2 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(n) \qquad f(z) - w_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Elles ont une infinité de racines, sauf peut-être *deux* au plus; nous les excluons si elles se présentent. Soient alors z_1 une racine de (1), z_2 une racine de (2) satisfaisant à

$$|z_2| \geq 2|z_1|,$$

et ainsi de suite, z_n sera racine de (n) et vérifiera l'inégalité

$$|z_n| \geq 2|z_{n-1}|.$$

Pour fixer les idées, on peut prendre la plus petite racine satisfaisant à cette équation. Joignons ces points par un chemin continu (par exemple, relions les points consécutifs par des portions de droite); ce chemin va à l'infini, puisque l'on a

$$|z_n| \geq 2^{n-1}|z_1|.$$

---

(1) G. JULIA, *Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières ou méromorphes* (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. XXXVI, 1919, p. 109).

Les valeurs prises par $f(z)$ sur ce chemin comprenant entre autres toutes les valeurs rationnelles complexes (sauf peut-être deux) forment un ensemble dense dans tout le plan. Il en est même toujours ainsi si l'on considère le chemin depuis un point, quelque éloigné qu'il soit, jusqu'à l'infini.

56. **Valeurs asymptotiques.** — Les courbes aboutissant au point singulier essentiel qui sont les plus intéressantes sont celles sur lesquelles la fonction tend régulièrement vers une limite unique finie ou infinie ω; cette limite s'appelle *valeur asymptotique* de la fonction, et la courbe *chemin de détermination* ω.

Le premier exemple cité s'énoncera en disant que 0 et ∞ sont des valeurs asymptotiques de la fonction e^z, l'axe réel positif étant un chemin de détermination ∞, et l'axe réel négatif un chemin de détermination 0.

Les valeurs asymptotiques ont été étudiées en particulier par M. Iversen (1), dont nous énoncerons seulement les principaux résultats :

Toute valeur asymptotique ω d'une fonction entière ou méromorphe $w = f(z)$ est un point critique transcendant de la fonction inverse $z = \varphi(w)$.

Ce fait avait été pressenti depuis longtemps par M. Hurwitz, qui n'avait pas réussi à le démontrer.

Réciproquement, tout point critique transcendant de $z = \varphi(w)$ est une valeur asymptotique de $w = f(z)$.

Lorsqu'il existe des valeurs exceptionnelles pour la fonction $w = f(z)$, ce sont des points critiques transcendants de la fonction $z = \varphi(w)$. Il en résulte que toute valeur exceptionnelle est une valeur asymptotique.

M. Valiron a donné plus récemment une démonstration simple de l'existence d'un chemin de détermination ∞ pour toute fonction entière (2).

Dans l'exemple de la fonction exponentielle, les valeurs exceptionnelles 0 et ∞ sont justement les deux valeurs asymptotiques

(1) IVERSEN, *Recherche sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes* (*Thèse*, Helsingfors, 1914).

(2) G. VALIRON, *C. R. Acad. Sc.*, t. 166, p. 382-384.

que nous avons trouvées. On observera la même chose pour tang z dont les valeurs exceptionnelles $+i$ et $-i$ sont valeurs asymptotiques correspondant à l'axe imaginaire.

II. — COURBES ENTOURANT LE POINT SINGULIER.

57. Nous avons vu dans les notions préliminaires (n° 4) que, si un point singulier essentiel n'est pas limite de pôles, il est impossible que la fonction soit bornée sur une infinité de circonférences ayant ce point pour centre. La conclusion vaut d'ailleurs pour une suite de courbes emboîtées les unes dans les autres et tendant vers le point singulier essentiel.

En particulier, il est impossible que, sur une telle suite de courbes $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, la fonction $f(z)$ tende vers une limite finie λ. Il est clair en effet qu'on aurait, à partir d'un rang p,

$$|f(z)-\lambda|<\varepsilon$$

et

$$|f(z)|<|\lambda|+\varepsilon$$

sur les courbes C_n.

La fonction peut-elle admettre sur ces courbes la limite ∞ ? On peut essayer de faire apparaître une contradiction analogue en prenant une fonction de la forme

$$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)-a}$$

qui tendra vers zéro sur ces courbes. Nous retomberons sur la même contradiction si, pour $\varphi(z)$, le point essentiel n'est pas limite de pôles; il faut et il suffit pour cela que a soit valeur exceptionnelle pour $f(z)$. Ainsi donc, s'il y a une valeur exceptionnelle finie, il est impossible que $f(z)$ ait une limite sur les courbes C_n; si ∞ est la seule valeur exceptionnelle, $f(z)$ ne peut avoir que ∞ pour limite sur C_n.

Ceci s'étend évidemment aux valeurs exceptionnelles quelconques : une fonction à *deux* valeurs exceptionnelles ne peut pas avoir de limite; une fonction à valeur exceptionnelle *unique* ne peut avoir d'autre limite que sa valeur exceptionnelle.

M. Wiman a montré que, pour toute fonction entière d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$, on peut trouver des courbes s'emboîtant mutuelle-

ment et s'éloignant à l'infini, sur lesquelles la fonction augmente indéfiniment. Rappelons ce qu'on entend par *ordre réel* d'une fonction entière (1) : soient $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ les zéros rangés par ordre de modules croissants; on considère la série $\sum \frac{1}{|a_n|^\sigma}$; elle est convergente ou divergente, suivant la valeur de σ; on peut ainsi répartir les nombres positifs en deux catégories, séparées par le nombre ρ; ce nombre est tel que, quel que soit $\varepsilon > 0$, la série $\sum \frac{1}{|a_n|^{\rho+\varepsilon}}$ converge, tandis que la série $\sum \frac{1}{|a_n|^{\rho-\varepsilon}}$ diverge.

Exemple : Soit la fonction entière

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{q^n}\right), \qquad q > 1.$$

Évaluons l'ordre de cette fonction : les zéros sont $q, q^2, \ldots, q^n, \ldots$; nous considérons donc la série

$$\frac{1}{q^\sigma} + \frac{1}{q^{2\sigma}} + \ldots + \frac{1}{q^{n\sigma}} + \ldots;$$

c'est une progression géométrique de raison $\frac{1}{q^\sigma} < 1$, puisque σ est positif. La fonction est *d'ordre nul.*

Elle vérifie une propriété fonctionnelle très simple :

$$f(qz) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{q^{n-1}}\right) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{q^n}\right) = (1-z) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{q^n}\right).$$

Donc

$$\begin{aligned} f(qz) &= (1-z) f(z), \\ f(q^2 z) &= (1-z)(1-qz) f(z), \\ &\ldots\ldots\ldots

$Cq^2, \ldots, Cq^n, \ldots$; ce sont les valeurs de

$$|f(z)|, \quad |f(qz)|, \quad \ldots, \quad |f(q^n z)|, \quad \ldots$$

pour z sur C; la distance du point 1 aux points z, qz, ..., $q^n z$, ... est au moins égale à 2; donc

$$|1-z| \geq 2, \qquad |1-qz| > 2, \qquad \ldots, \qquad |1-q^{n-1}z| > 2,$$

d'où

$$|f(q^n z)| > 2^n |f(z)|$$

ou

$$|f(z)| \text{ sur } Cq^n > 2^n |f(z)| \text{ sur C.}$$

On voit bien que la fonction augmente indéfiniment sur ces circonférences.

Pour un point singulier limite de pôle, nous avons vu (n° 5) que la fonction peut rester bornée sur des circonférences entourant ce point. Il en résulte que, pour une fonction sans valeur exceptionnelle, les considérations qui précèdent ne feront apparaître aucune impossibilité à l'existence d'une limite sur des courbes entourant le point singulier et tendant vers lui.

III. — DOMAINES DONT LA FRONTIÈRE PASSE AU POINT SINGULIER.

58. **Méthodes de MM. Lindelöf et Iversen.** — Soit Δ un domaine simplement connexe dont le contour passe au point singulier essentiel a de la fonction $f(z)$; appelons Γ' et Γ'' les deux arcs de la courbe frontière qui aboutissent en a.

1° *Si, dans le domaine fermé* Δ, *la fonction* $f(z)$ *est bornée en module, et si* $f(z)$ *tend vers une même limite* ω *lorsque* z *tend vers* a *sur* Γ' *et sur* Γ'', $f(z)$ *tend uniformément vers* ω *lorsque* z *tend vers* a *dans* Δ.

On peut faire la représentation conforme de Δ sur un cercle C; on a alors une fonction $F(z)$ satisfaisant aux mêmes hypothèses dans le cercle. Séparons la partie réelle de la partie imaginaire

$$z = x + iy, \qquad F(z) = U(x, y) + iV(x, y).$$

$F(z)$ étant bornée dans le cercle C et sur la circonférence, $U(x, y)$ et $V(x, y)$ sont des fonctions harmoniques régulières;

leur valeur à l'intérieur du cercle est donnée en fonction de leur valeur sur la circonférence par l'intégrale de Poisson (1). Les valeurs de $U(x, y)$ ou de $V(x, y)$ sur la circonférence sont continues au point a singulier essentiel pour $F(z)$, car elles ont la même limite $\mathcal{R}\omega$ ou $\mathcal{I}\omega$ lorsqu'on tend vers a d'un côté ou de l'autre. Le théorème de Schwarz nous apprend alors que l'intégrale de Poisson tend vers la même limite (2) : à tout nombre ε correspond un cercle γ de centre a tel qu'en tout point du cercle C intérieur à γ, on ait

$$|\mathcal{R}\omega - U(x, y)| < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad |\mathcal{I}\omega - V(x, y)| < \varepsilon$$

et par suite

$$|\omega - F(z)| < \varepsilon\sqrt{2}.$$

En revenant au domaine Δ, on a la même conclusion pour $f(z)$.

Si $f(z)$ tend vers l'infini sur Γ' et sur Γ'', peut-on affirmer un fait analogue? On essaiera de ramener au cas précédent en considérant une fonction

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - a}$$

qui tend vers zéro sur Γ' et sur Γ'', pour que le théorème précédent s'applique, il faut et il suffit qu'on ait dans le domaine fermé Δ

$$|\varphi(z)| < M,$$

c'est-à-dire

$$|f(z) - a| > \frac{1}{M}.$$

S'il existe un nombre a tel que l'inégalité précédente soit vérifiée dans Δ, *et si* $f(z)$ *tend vers* ∞ *lorsque z tend vers a sur* Γ' *et sur* Γ'', $f(z)$ *tend uniformément vers* ∞ *lorsque z tend vers a à l'intérieur de* Δ.

59. 2° *Si* $f(z)$ *tend sur* Γ' *vers une limite* ω', *et sur* Γ'' *vers une limite différente* ω'', *la fonction* $f(z)$ *ne peut pas rester bornée dans* Δ.

---

(1) PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, Chap. I, p. 16.

(2) PICARD, *Traité d'Analyse*, t. I, Chap. X, p. 311 (3e édition).

Il suffit de considérer la fonction

$$\varphi(z) = \left[f(z) - \frac{\omega' + \omega''}{2}\right]^2,$$

qui a pour limite sur Γ', $\left(\frac{\omega' - \omega''}{2}\right)^2$; et sur Γ'', $\left(\frac{\omega'' - \omega'}{2}\right)^2$, c'est-à-dire la même limite *non nulle*. Si $f(z)$ était bornée dans Δ, $\varphi(z)$ le serait aussi. D'après le théorème précédent, $\varphi(z)$ tendrait uniformément vers $\left(\frac{\omega' - \omega''}{2}\right)^2$ lorsque z tend vers a dans Δ; dans la partie de Δ voisine de a, cette fonction resterait finie et *différente de zéro*, et chacune des racines carrées serait une fonction *uniforme* dans cette région; en particulier, $f(z) - \frac{\omega' + \omega''}{2}$ tendrait uniformément soit vers $\frac{\omega' - \omega''}{2}$, soit vers $\frac{\omega'' - \omega'}{2}$, c'est-à-dire que $f(z)$ aurait une limite unique, soit ω', soit ω'', ce qui est contraire à l'hypothèse.

60. 3° *Si la fonction $f(z)$, méromorphe dans Δ, tend vers la même limite α (finie ou infinie) sur Γ' et sur Γ'', ou bien $f(z)$ tend uniformément vers α lorsque z tend vers a dans Δ, ou bien $f(z)$ prend dans Δ, au voisinage de a, toute valeur finie ou infinie, sauf deux au plus.*

Nous allons montrer que si $f(z)$ admet, dans Δ, trois valeurs exceptionnelles au voisinage de a, elle tend vers la limite unique α. On peut toujours ramener ces valeurs à être 0, 1, ∞, et supposer que $f(z)$ ne les prend pas (en diminuant le domaine Δ si c'est nécessaire).

Supposons tout d'abord que la limite α soit différente des valeurs exceptionnelles.

Dans le domaine fermé Δ, $\nu[f(z)]$ sera uniforme; $\nu[f(z_0)]$ étant la détermination choisie au point initial z_0 du domaine, considérons la fonction

$$\Omega(z) = \omega[f(z)] = \frac{\nu[f(z)] - \nu[f(z_0)]}{\nu[f(z)] - \overline{\nu[f(z_0)]}},$$

elle est bornée dans Δ :

$$|\Omega(z)| < 1.$$

Sur Γ' et sur Γ'', elle tend vers la même limite $\omega(\alpha)$ (la fonction

étant uniforme); comme α est différent de 0, 1, ∞, cette valeur est régulière pour la fonction inverse :

$$f(z) = \chi[\Omega(z)];$$

par suite, $f(z)$ tend uniformément vers $\chi[\omega(\alpha)] = \alpha$, quand z tend vers a dans Δ.

Si la limite α est égale à 1, $f(z)$ ne prenant dans Δ ni la valeur 0, ni la valeur ∞, chacune des fonctions $\sqrt{f(z)}$ est uniforme et ne prend d'ailleurs aucune des valeurs 0, ∞, -1, $+1$, elle a la même limite sur Γ' et sur Γ'' (par suite de l'uniformité), et pour l'une d'elles cette limite est -1; elle tend uniformément vers -1; donc $f(z)$ tend uniformément vers 1.

Si la limite était 0, $1 - f(z)$ aurait 1 pour limite; si la limite était ∞, $1 - \frac{1}{f(z)}$ aurait 1 pour limite, et l'on est toujours ramené à ce cas.

61. 4° *Si la fonction $f(z)$, méromorphe dans Δ, tend vers deux limites différentes α' sur Γ' et α'' sur Γ'', $f(z)$ prend dans Δ, au voisinage de a, toute valeur finie ou infinie, sauf deux au plus.*

S'il y avait trois valeurs exceptionnelles, la fonction $\omega[f(z)]$ serait uniforme et bornée; d'après le second théorème, elle ne pourrait pas avoir les deux limites différentes $\omega(\alpha')$ sur Γ' et $\omega(\alpha'')$ sur Γ''.

62. Méthode des familles normales. — Ces résultats, particulièrement intéressants quand on les applique à des secteurs ayant leur sommet au point singulier essentiel, ont été retrouvés et étendus par M. Montel, en utilisant les familles normales.

Dans ce qui suit, nous supposerons que la fonction $f(z)$, qui admet en O un point singulier essentiel, est holomorphe dans le secteur AOB, et n'y prend ni la valeur 0, ni la valeur 1.

1° *Si $f(z)$ reste bornée sur un rayon* OL *intérieur au secteur, elle reste également bornée dans tout secteur* A'OB' *contenant* OL *et contenu dans* AOB.

Considérons (*fig.* 6) le secteur annulaire ABDC compris entre

les circonférences de rayons R et $r < \frac{R}{2}$. Les valeurs prises dans ce quadrilatère par les fonctions

$$f_n(z) = f\left(\frac{z}{2^n}\right)$$

sont les valeurs prises par $f(z)$ dans les quadrilatères déduits de ABDC par des homothéties $\frac{1}{2^n}$; ces derniers remplissent, en empiétant l'un sur l'autre, tout le secteur AOB. Les fonctions $f_n(z)$ forment une famille normale. Les valeurs prises par

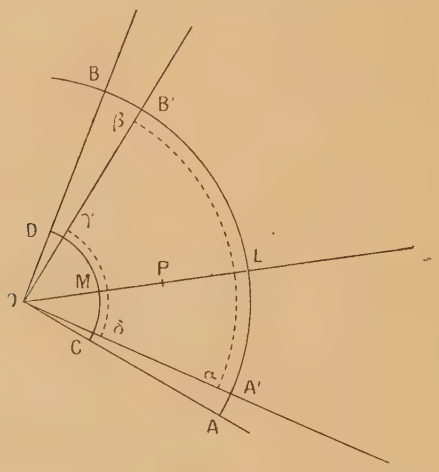

Fig. 6.

elles, en un point P de OL, sont les valeurs de $f(z)$ en différents points de OL, et par suite sont bornées en module. Nous avons donc une famille normale de fonctions bornées dans leur ensemble. Prenons comme domaine intérieur à ABDC le quadrilatère $\alpha\beta\delta\gamma$ limité par les rayons OA′ et OB′ et deux arcs de cercle $\alpha\beta$ de rayon $\rho\,[2r < \rho < R]$ et $\gamma\delta$ de rayon $\frac{\rho}{2} > r$. On a dans ce quadrilatère

$$|f_n(z)| < M.$$

Les valeurs prises par toutes ces fonctions dans $\alpha\beta\delta\gamma$ sont celles prises par $f(z)$ dans une suite de quadrilatères qui se juxtaposent pour former le secteur $\alpha O\beta$. On a donc dans tout ce secteur

$$|f(z)| < M.$$

Il est clair que si l'on a sur le rayon OL une inégalité de la forme

$$|f(z)|<\rho_0 \qquad \text{ou} \qquad |1-f(z)|<\rho_0$$

on en conclurait, pour tout secteur A'OB', une inégalité

$$|f(z)<\rho \qquad \text{ou} \qquad |1-f(z)|<\rho.$$

63. 2° *Si $f(z)$ tend vers λ lorsque z tend vers* O *sur* OL, *elle tend uniformément vers λ quand z tend vers* O *dans un secteur* A'OB' *intérieur à* AOB.

Sur la portion LM du rayon OL intérieure à ABDC, $f_n(z)$ prend les mêmes valeurs que $f(z)$ sur un petit segment de OL voisin de O; donc lorsque n augmente indéfiniment, la limite de $f_n(z)$ en tout point de LM est λ. Il en résulte que la suite $f_n(z)$ converge dans tout le domaine et uniformément à l'intérieur (énoncé 1°, n° 37).

La fonction limite, prenant la valeur λ sur LM, est forcément la constante λ. On a donc

$$|f_n(z)-\lambda|<\varepsilon$$

pour n suffisamment grand, quel que soit z dans $\alpha\beta\delta\gamma$, c'est-à-dire

$$|f(z)-\lambda|<\varepsilon$$

dans le secteur limité par les rayons OA' et OB' et une circonférence convenable.

Si $f(z)$ augmente indéfiniment sur OL, le résultat subsiste puisque $\frac{1}{f(z)}$ tend vers zéro.

64. 3° *Si, lorsque z tend vers zéro sur* OL, *$f(z)$ admet l'un des nombres* 0, 1, ∞ *pour une de ses valeurs limites, elle l'admet aussi sur tout autre rayon* OL'.

Il suffit de le démontrer pour ∞. Si $f(z)$ n'avait pas sur OL' une de ses limites infinie, elle serait bornée sur ce rayon, elle le serait donc aussi sur OL.

65. 4° *L'ensemble des valeurs limites est le même sur deux courbes* S *et* S' *tangentes en* O *à la même droite* OL *intérieure à l'angle* AOB.

Soit λ une valeur limite de $f(z)$ sur S; on peut prendre sur

Univ. of Arizona Library

cette courbe des points $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ tendant vers zéro et tels que λ soit limite de la suite

$$f(z_1), \quad f(z_2), \quad \ldots, \quad f(z_n), \quad \ldots$$

Considérons, dans un domaine D contenant z_1, la famille des fonctions

$$f_1(z) = f(z), \quad f_2(z) = f\left(\frac{z_2}{z_1} z\right), \quad \ldots, \quad f_n(z) = f\left(\frac{z_n}{z_1} z\right), \quad \ldots$$

Les valeurs de ces fonctions dans D sont les valeurs de $f(z)$ dans les domaines D, $\frac{z_2}{z_1}$D, ..., $\frac{z_n}{z_1}$D, ..., qui sont contenus dans le secteur AOB si D est convenablement choisi. Ces fonctions ne prennent donc pas les valeurs o, 1, ∞ et forment une famille normale de fonctions holomorphes. Leurs valeurs au point z_1 sont

$$\begin{aligned} f_1(z_1) &= f(z_1), \\ f_2(z_1) &= f(z_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_n(z_1) &= f(z_n), \end{aligned}$$

qui convergent vers λ. Ces fonctions sont donc bornées en z_1 et forment une famille également continue. Soient $z'_1, z'_2, \ldots, z'_n, \ldots$ des nombres de mêmes modules respectifs que $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ et représentées par des points de S' $\frac{z'_n}{z_n}$ tend vers l'unité, et l'on a

$$f(z'_n) = f_n\left(\frac{z'_n}{z_n} z_1\right); \qquad \text{d'où} \qquad f(z'_n) - f(z_n) = f_n\left(\frac{z'_n}{z_n} z_1\right) - f_n(z_1).$$

Il est permis de supposer que les points $\frac{z'_n}{z_n} z_1$ sont dans le domaine D; d'après l'égale continuité, ε étant arbitraire, on aura

$$\left| f_n\left(\frac{z'_n}{z_n} z_1\right) - f_n(z_1) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

dès que

$$\left| \frac{z'_n}{z_n} z_1 - z_1 \right| < \eta,$$

c'est-à-dire

$$\left| \frac{z'_n}{z_n} - 1 \right| < \frac{\eta}{|z_1|},$$

ce qui a lieu à partir d'un certain rang p', on a alors

$$|f(z'_n) - f(z_n)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{pour} \qquad n \geq p'.$$

D'autre part, on a

$$|f(z_n) - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{pour} \qquad n \geq p'',$$

puisque $f(z_n)$ tend vers λ, d'où en appelant p le plus grand des entiers p' et p''

$$|f(z_n') - \lambda| < \varepsilon \qquad \text{pour} \qquad n \geq p.$$

66. 5° *Si, sur un rayon* OL, *l'ensemble des valeurs limites est dénombrable, il est le même sur tout autre rayon* OL′ *intérieur au secteur* AOB.

Reprenons les fonctions considérées n° 62 (propriété 1°) dans le secteur annulaire ABCD, et qui forment une famille normale. Soit $F(z)$ l'une de leurs fonctions limites

$$f_{n_1}(z), \quad f_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad f_{n_p}(z), \quad \ldots \quad \to \quad F(z).$$

En un point P d'affixe z_0, quelconque sur le rayon LM (*fig.* 6), la valeur de $F(z)$ est

$$F(z_0) = \lim_{p=\infty} f_{n_p}(z_0) = \lim_{p=\infty} f\left(\frac{z_0}{2^{n_p}}\right).$$

Les points $\frac{z_0}{2^{n_p}}$ tendant vers O sur OL, cette limite est donc l'une des valeurs limites de $f(z)$ sur OL, soit λ_k :

$$F(z_0) = \lambda_k.$$

Ceci étant vrai quel que soit z_0, il en résulte que la fonction analytique $F(z)$ ne peut prendre sur LM qu'une infinité dénombrable de valeurs distinctes (les limites λ_k); elle se réduit donc à la constante λ_k; les fonctions $f_{n_p}(z)$ tendent donc uniformément vers λ_k dans $\alpha\beta\gamma\delta$. Sur la portion de OL′ intérieure à ce quadrilatère, on aura

$$f_{n_p}(z) - \lambda_k | < \varepsilon \qquad \text{pour} \qquad p \geq q,$$

c'est-à-dire

$$|f(z) - \lambda_k| < \varepsilon$$

aux points d'une infinité de segments portés par OL′ et tendant vers zéro (¹).

(¹) Le lecteur trouvera au Mémoire de M. Montel de 1916 (p. 263) différentes autres propriétés dans le même ordre d'idées.

CHAPITRE V.

APPROXIMATION CONTINUE RÉGULIÈRE DU POINT SINGULIER ESSENTIEL.

I. — APPLICATION DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS.

67. Pour simplifier le langage, nous supposerons le point singulier essentiel unique et à l'infini; nous parlerons donc de fonctions entières et de fonctions méromorphes; mais les conclusions s'appliqueront aux fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé.

Le caractère commun aux travaux que nous venons d'étudier consiste en ce que l'on fait une hypothèse sur la fonction dans un certain domaine (par exemple on suppose qu'elle ne prend pas trois certaines valeurs distinctes dans un secteur), et à en tirer des conclusions précises. On ne s'est pas demandé si ces hypothèses peuvent être faites dans un domaine quelconque. Par exemple, pour une fonction entière, peut-on supposer l'existence de deux valeurs exceptionnelles finies dans tout angle de sommet O? Ou bien existe-t-il une ou plusieurs directions telles que, dans un angle arbitrairement petit autour de l'une d'elles, il y ait au maximum une valeur exceptionnelle?

Pour les fonctions les plus usuelles, on peut répondre à cette question grâce aux propriétés de périodicité. La fonction e^z, ayant la période $2\pi i$, prend toutes les valeurs dont elle est susceptible dans une bande limitée par deux parallèles à l'axe réel, distantes de 2π. Un angle arbitrairement petit autour de l'axe imaginaire comprend une largeur aussi grande que l'on veut dans les bandes suffisamment éloignées de l'origine. e^z prend donc une infinité de fois toute valeur finie non nulle, dans cet angle arbitrairement petit. Pour une fonction elliptique (méromorphe), un angle de direction arbitraire et d'ouverture arbitrairement petite finit par

contenir, à partir d'une certaine distance de l'origine, une infinité de parallélogrammes de périodes. Dans cet angle, la fonction prend donc une infinité de fois toute valeur finie ou infinie.

68. Prenons maintenant une fonction entière ou méromorphe $f(z)$ qui admette un chemin L de détermination ω allant à l'infini avec une direction asymptotique, d'argument φ_0. Un secteur quelconque contenant le rayon φ_0 contient, à partir d'un certain point, le chemin L. Si, dans ce secteur, $f(z)$ a trois valeurs exceptionnelles, elle tendra vers ω sur tout rayon intérieur au secteur et tendra uniformément vers ω dans tout secteur intérieur au secteur considéré. Deux hypothèses sont donc seulement possibles :

1° Ou bien, dans tout secteur contenant le rayon φ_0, la fonction méromorphe $f(z)$ prend une infinité de fois toute valeur, sauf peut-être *deux* valeurs exceptionnelles au plus;

2° Ou bien, dans un certain secteur AOB contenant le rayon φ_0, $f(z)$ admet trois valeurs exceptionnelles au moins, et alors il en est visiblement de même dans tout secteur intérieur à AOB.

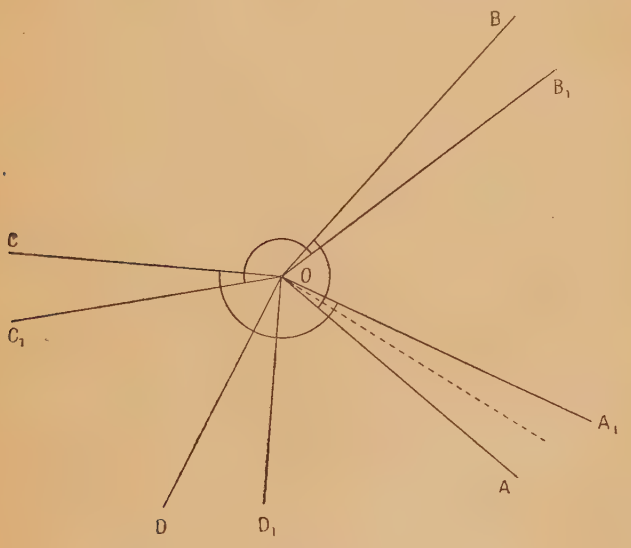

Fig. 7.

Considérons alors les trois secteurs AOB, A_1OC, B_1OC_1 (*fig.* 7) empiétant deux à deux l'un sur l'autre, et supposons

que $f(z)$ ait, dans chacun d'eux, trois valeurs exceptionnelles (différentes pour différents secteurs, pour ne pas contredire le théorème de M. Picard). Sur tout rayon de AOA_1, $f(z)$ tend vers ω; un tel rayon appartenant au secteur A_1OC, $f(z)$ tend uniformément vers ω dans tout secteur intérieur à A_1OC. La même conclusion s'applique à B_1OC_1. Il est donc impossible de supposer que, dans chacun des trois secteurs AOB, A_1OC, B_1OC_1, $f(z)$ a trois valeurs exceptionnelles, sans quoi $f(z)$ tendrait uniformément vers ω au voisinage de l'infini. Donc, dans A_1OC par exemple, $f(z)$ prend toute valeur finie ou infinie, sauf deux au plus. En divisant ce secteur en deux autres A_1OD et COD_1, ayant en commun le secteur DOD_1, nous pouvons continuer le même raisonnement. Si, dans chacun d'eux, $f(z)$ avait trois valeurs exceptionnelles, $f(z)$ devrait tendre uniformément vers ω dans A_1OC, ce qui est impossible.

Il existe donc une infinité de secteurs emboîtés, dont l'ouverture tend vers zéro, dans chacun desquels $f(z)$ a deux valeurs exceptionnelles au plus. Il peut y avoir plusieurs suites de secteurs emboîtés ayant cette propriété. Chacune d'elles admet un rayon limite OP : *dans tout secteur contenant* OP, *quelque petite que soit son ouverture, $f(z)$ prend toute valeur finie ou infinie sauf deux valeurs exceptionnelles au plus.*

On peut arriver au même résultat sous des hypothèses moins restrictives. Supposons que $f(z)$ soit une fonction entière qui reste bornée sur un chemin L allant à l'infini dans la direction asymptotique φ_0. Si dans un secteur contenant cette direction, $f(z)$ admet deux valeurs exceptionnelles finies (c'est-à-dire trois valeurs exceptionnelles en tout), elle reste bornée dans tout secteur intérieur au premier. En utilisant ce fait comme l'existence de la limite ω dans la démonstration précédente, on parviendra à une conclusion analogue. La même conclusion s'applique à une fonction méromorphe admettant une valeur exceptionnelle a et satisfaisant à l'inégalité

$$|f(z)-a|>\rho$$

sur un chemin tel que L.

Avec quelques modifications de raisonnement, on pourrait seulement supposer que, sur L, l'argument reste compris entre deux limites finies. En utilisant la représentation conforme, on pourrait

substituer aux secteurs rectilignes des secteurs curvilignes limités par des courbes semblables à une courbe donnée $\mathcal{L}$.

II. — FONCTIONS ENTIÈRES.

69. Il s'agit d'étudier les valeurs prises par une fonction entière $f(z)$ lorsqu'on s'approche du point à l'infini sur des courbes continues d'une *forme déterminée donnée a priori*. La courbe-type C peut être supposée partir du point 1, et représentée par l'expression de l'affixe d'un point variable en fonction d'un paramètre réel t variant de 1 à $+\infty$:

$$T = \sigma(t) = \sigma_1(t) + i\sigma_2(t), \qquad \sigma(1) = 1, \qquad \sigma(+\infty) = \infty.$$

Nous allons étudier la fonction sur les courbes zC (¹) (z étant un nombre complexe quelconque) qui se déduisent de C par homothétie et rotation. Une telle courbe étant le lieu des points $z\sigma(t)$ lorsque t varie, il nous faut étudier $f[z\sigma(t)]$. Formons avec ces quantités la famille de fonctions entières

$$f_t(z) = f[z\sigma(t)].$$

Soit γ la couronne limitée par deux cercles quelconques C_1 et C_2 de centre O. Les valeurs que prend $f_t(z)$ dans γ sont celles que prend $f(z)$ dans $\gamma\sigma(t)$; lorsque t varie de 1 à $+\infty$, $|\sigma(t)|$ varie dans le même intervalle, et par suite $\gamma\sigma(t)$ balaie tout l'extérieur du cercle C_1. Le théorème de M. Picard revient donc à affirmer qu'il y a au plus une valeur finie que les fonctions $f_t(z)$ ne prennent pas dans γ.

Demandons-nous si la famille des $f_t(z)$ est normale dans cette couronne?

Le théorème de M. Picard n'impose *a priori* aucune solution car l'existence de *deux valeurs exceptionnelles finies* est une condition suffisante, mais non nécessaire pour que la famille soit normale. Nous allons voir directement l'impossibilité pour cette famille d'être normale dans γ. L'existence des deux valeurs exceptionnelles, pour les $f_t(z)$ dans γ ou pour $f(z)$ à l'extérieur de C_1,

(¹) Notation adoptée n° 31.

sera donc par là même impossible et le théorème de M. Picard sera établi par une nouvelle méthode. Mais en poussant l'analyse plus loin, nous devons affirmer qu'il existe au moins un point de γ où la famille n'est pas normale, et c'est de là que nous tirerons une conclusion nouvelle qui précise le théorème.

70. Supposons normale la famille $f_t(z)$. Prenons une suite infinie de fonctions de la famille correspondant à des valeurs de t croissant indéfiniment :

$$t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots, \qquad t_n \to +\infty.$$

De cette suite, on peut extraire une suite partielle uniformément convergente, formée des fonctions correspondant à

$$t_{n_1}, \quad t_{n_2}, \quad \ldots, \quad t_{n_i}, \quad \ldots.$$

La limite de cette suite ne saurait être une fonction holomorphe dans γ. En effet, il résulte de la convergence uniforme que les fonctions de la suite seraient bornées dans leur ensemble dans le domaine γ. Or l'inégalité

$$|f_t(z)| < \mathrm{M} \quad \text{dans} \quad \gamma$$

équivaut à

$$|f(z)| < \mathrm{M} \quad \text{dans} \quad \gamma\sigma(t).$$

Cette dernière inégalité aurait donc lieu dans la suite de couronnes

$$\gamma\sigma(t_{n_1}), \quad \gamma\sigma(t_{n_2}), \quad \ldots, \quad \gamma\sigma(t_{n_i}), \quad \ldots$$

grandissant indéfiniment, ce qui est impossible (ce raisonnement est tout à fait analogue à celui de M. Montel). Donc, la seule limite possible pour une suite convergente de fonctions $f_t(z)$ dont les indices t augmentent indéfiniment est la constante infinie. Dans ces conditions, la fonction $f_t(z)$ tend uniformément vers l'infini avec t, dans la couronne γ. L'hypothèse contraire conduirait en effet à admettre que l'on peut trouver une suite d'indices croissant indéfiniment

$$t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots, \quad t_n \to \infty$$

telle que, pour chaque fonction $f_{t_n}(z)$, on ait en quelque point z_n de la couronne

$$|f_{t_n}(z_n)| < \mathrm{M},$$

M étant un nombre positif fixe. La famille étant normale, on pourrait en extraire une suite de fonctions correspondant aux indices t_{n_1}, t_{n_2}, ..., t_{n_i}, ..., convergeant uniformément vers une limite finie d'après l'inégalité ci-dessus, ce qui a été reconnu impossible.

Donc, étant donné un nombre positif arbitraire M, il lui correspond un nombre t_0, tel que l'inégalité

$$t > t_0$$

entraîne

$$|f_t(z)| > \mathrm{M} \quad \text{dans} \quad \gamma,$$

c'est-à-dire

$$|f(z)| > \mathrm{M} \quad \text{dans} \quad \gamma\sigma(t).$$

L'ensemble des couronnes $\gamma\sigma(t)$ pour $t > t_0$ recouvre l'extérieur du cercle $C_1\sigma(t_0)$. L'inégalité précédente caractérise donc le point à l'infini comme pôle et non pas comme point essentiel.

La conclusion finale est bien l'impossibilité par la famille $f_t(z)$ d'être normale dans γ. *Il existe donc au moins un point z_0 dans toute couronne* (C_1, C_2) *entourant l'origine, où la famille des $f_t(z)$ n'est pas normale.*

71. Soit $\mathfrak{D}_0$ un cercle arbitrairement petit ayant ce point pour centre. La famille n'étant pas normale dans ce cercle, les fonctions $f_t(z)$ ne peuvent y admettre plus d'une valeur exceptionnelle finie. C'est un renseignement sur les valeurs de $f[z\sigma(t)]$ pour z dans $\mathfrak{D}_0$, t quelconque.

Lorsque z décrit $\mathfrak{D}_0$, $z\sigma(t)$ décrit le cercle $\mathfrak{D}_t = \mathfrak{D}_0\sigma(t)$ qui a pour centre $z_0\sigma(t)$ et qui est vu de l'origine sous le même angle que $\mathfrak{D}_0$ (puisque l'on passe de l'un à l'autre par homothétie et rotation. Le lieu des centres $z_0\sigma(t)$ est la courbe z_0C, et l'aire engendrée par les cercles est une bande Δ contenant à son intérieur cette courbe, et d'ouverture arbitrairement petite comme le rayon de $\mathfrak{D}_0$. Les valeurs des $f_t(z)$ dans $\mathfrak{D}_0$ sont celles de $f(z)$ dans Δ.

Ainsi donc, *si petite que soit l'ouverture de la bande Δ pourvu qu'elle contienne à son intérieur la courbe privilégiée z_0C, la fonction $f(z)$ prendra, dans cette bande Δ, toute valeur finie sauf peut-être une valeur exceptionnelle au plus.*

Il est clair que si la fonction $f(z)$ admet une valeur exceptionnelle a dans tout le plan, toute valeur finie autre que a sera prise

dans la bande Δ. De plus, toute valeur, sauf la valeur exceptionnelle éventuelle, est prise une infinité de fois dans la bande.

Dans le cas où C est la portion $(1, +\infty)$ de l'axe réel, on voit qu'il existe une ou plusieurs demi-droites issues de l'origine telles que dans tout angle ayant pour sommet O et contenant une de ces demi-droites, la fonction $f(z)$ prenne une infinité de fois toute valeur finie à l'exception peut-être d'une seule valeur.

72. Exemples. — 1° Nous avons vu que, pour e^z, les rayons privilégiés sont l'axe imaginaire positif et négatif; sur cet axe, on a

$$|e^z| = 1.$$

Ceci nous montre que les valeurs prises par $f(z)$ sur la courbe privilégiée peuvent se répartir sur une courbe simple; ce sont seulement les valeurs prises dans un secteur curviligne arbitrairement étroit qui couvrent tout le plan.

Revenons à la fonction e^z dans le cas où C est la portion $(1, +\infty)$ de l'axe réel, ce qui correspond à

$$\sigma(t) = t.$$

On a alors

$$f_t(z) = e^{zt}.$$

Cherchons en quels points d'une couronne γ cette famille est normale et en quels points elle ne l'est pas. Si nous prenons une suite infinie de fonctions correspondant à des valeurs de t ayant une limite λ, e^{zt} tendra vers $e^{\lambda z}$; la difficulté ne peut provenir que du cas où les t augmentent indéfiniment, zt augmentant indéfiniment, on ne peut conclure que si l'on connaît le signe de $\mathrm{R}\,zt$, c'est-à-dire celui de $\mathrm{R}\,z$ (t étant positif). Si donc le point z_0 n'est pas sur l'axe imaginaire, on pourra prendre $\mathfrak{D}_0$ assez petit pour être d'un même côté de cet axe, et alors e^{zt} tendra vers ∞ ou vers zéro; la famille sera normale dans $\mathfrak{D}_0$. C'est aux points z_0 de l'axe imaginaire que la famille cesse d'être normale.

Nous voyons ainsi un exemple du cas où la famille des $f_t(z)$ est normale dans différentes portions de γ, séparées entre elles par des points où elle ne l'est pas.

2° Considérons maintenant la fonction entière elliptique de

Weierstrass

$$\sigma(z) = z \prod_{W}{}' \left(1 - \frac{z}{W}\right) e^{\frac{z}{W} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{W^2}}$$

où

$$W = 2h_1\omega_1 + 2h_2\omega_2,$$

$2\omega_1$ et $2\omega_2$ étant les périodes; h_1 et h_2 deux entiers positifs ou négatifs prenant toutes les valeurs sauf la combinaison (0, 0), ce qu'indique l'accent accompagnant le signe $\prod$.

Prenons pour C une spirale (logarithmique de pôle O pour fixer les idées), définie par la fonction $\Sigma(t)$; on posera

$$\sigma_t(z) = \sigma[z\Sigma(t)].$$

$\mathfrak{D}_0$ étant un cercle quelconque, les valeurs prises par $\sigma_t(z)$ dans $\mathfrak{D}_0$ sont celles prises par $\sigma(z)$ dans $\mathfrak{D}_t = \mathfrak{D}_0\Sigma(t)$. *Pour t assez grand*, ce cercle $\mathfrak{D}_t$ sera arbitrairement grand et contiendra un nombre de parallélogrammes de périodes aussi grand que l'on voudra; donc, dans ce cercle, $\sigma(z)$ aura des zéros en nombre supérieur à toute limite donnée *a priori*; autrement dit, *le nombre des zéros que possède* $\sigma_t(z)$ *dans* $\mathfrak{D}_0$ *dépassera toute limite quand t croît indéfiniment*. Toute fonction limite devrait être identiquement nulle dans $\mathfrak{D}_0$, or c'est incompatible avec les propriétés de la fonction $\sigma(z)$ (1).

La famille n'est donc normale en aucun point. Ceci se traduit pour la fonction $\sigma(z)$ par la propriété d'acquérir toute valeur finie sauf peut-être une dans toute bande Δ de la forme considérée construite à partir d'un point quelconque z_0 du plan.

73. Ensemble des points où la famille n'est pas normale. — Soit E l'ensemble des points du plan où la famille des $f_t(z)$ n'est pas normale. C'est évidemment un ensemble fermé : z_0 étant point limite de points $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, où la famille n'est pas normale, tout cercle de centre z_0 contient les points z_n à partir d'un certain rang, la famille ne saurait donc être normale dans un tel cercle, et z_0 appartient à E. Cet ensemble admet un point au

(1) *Voir* la note (2) de la page 111 du Mémoire de M. Julia (*Annales de l'É. N. S.*, 1919).

moins dans toute couronne entourant l'origine, et par suite sur toute courbe entourant l'origine. Il contient donc toujours *un continu* (qui peut être linéaire ou superficiel comme on le voit dans les exemples précédents).

Lorsque la fonction entière $f(z)$ admet une valeur exceptionnelle finie a, E *est un ensemble parfait.* En effet, si un point P de E était isolé, on pourrait de toute suite de fonctions $f_i(z)$ extraire une nouvelle suite qui, dans un petit cercle de centre P, convergerait partout, sauf au centre, vers une fonction holomorphe ou vers l'infini. La première éventualité est impossible, car du lemme classique de Weierstrass (2^e, n° 35), on conclurait que cette suite convergerait même au centre; et la seconde éventualité se ramène à la première en considérant, au lieu des $f_{i_n}(z)$, les fonctions $\frac{1}{f_{i_n}(z)-a}$ qui sont encore des fonctions entières.

74. **Racines des équations $f(z)-a=0$.** — Reprenons la proposition établie dans le cas où C est une droite passant par l'origine. Soient $z_1(a)$, $z_2(a)$, ..., $z_n(a)$, ... les racines de l'équation

$$f(z)-a=0.$$

Il y en a une infinité dans tout angle, si petit soit-il, contenant une de certaines demi-droites privilégiées d'argument φ_0. En d'autres termes, *les arguments de ces racines admettent φ_0 pour une de leurs limites*, et cela quel que soit a, sauf peut-être une seule valeur. Si, par exemple, les racines de

$$f(z)-a=0$$

ont un rayon limite unique $O\alpha$, ou bien les racines de toute autre équation

$$f(z)-b=0,$$

sauf peut-être une valeur de b, admettent $O\alpha$ pour un de leurs rayons limites (c'est ce qui se produit si a n'est pas la valeur exceptionnelle possible); ou bien les racines de toutes ces équations ont un rayon limite commun $O\beta$ distinct de $O\alpha$ (c'est ce qui se produit si a est valeur exceptionnelle).

On peut encore traduire dans un nouveau langage la propriété de la courbe privilégiée z_0C (obtenue à partir d'une courbe C

quelconque) : on peut, parmi les racines $z_n(a)$, en choisir une infinité $z_{n_1}(a)$, $z_{n_2}(a)$, ..., $z_{n_p}(a)$, ... qui se condensent vers la courbe $z_0 C$, en ce sens que *le rapport entre la distance de* $z_{n_p}(a)$ *à la courbe* $z_0 C$ *et le module de* $z_{n_p}(a)$ *tend vers zéro quand p augmente indéfiniment* (la valeur exceptionnelle étant toujours exclue).

Il est bien évident que tous ces résultats s'appliquent à une fonction méromorphe $\varphi(z)$ ayant une valeur exceptionnelle finie a, car la fonction

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(z) - a}$$

est alors entière. Plus généralement, on peut affirmer la même chose d'une fonction ayant un point singulier essentiel isolé autour duquel elle admet au moins une valeur exceptionnelle.

III.

FONCTIONS MÉROMORPHES AYANT UNE VALEUR ASYMPTOTIQUE.

75. Soit $\varphi(z)$ une fonction méromorphe pour laquelle Γ est un *chemin de détermination* ω. Nous nous donnons toujours la courbe C :

$$T = \sigma(t), \qquad \text{avec} \qquad \sigma(1) = 1, \qquad \sigma(+\infty) = \infty.$$

Formons la famille

$$\varphi_t(z) = \varphi[z\sigma(t)]$$

et voyons si elle peut être normale dans une couronne γ (C_1, C_2) ayant pour centre l'origine. Supposons d'abord qu'elle soit normale, et prenons une suite infinie de fonctions $\varphi_t(z)$ correspondant à des indices croissant indéfiniment, on peut en extraire une suite partielle uniformément convergente; soient

$$t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots, \qquad t_n \to \infty$$

les indices des fonctions de cette nouvelle suite. Les valeurs de $\varphi_{t_n}(z)$ dans γ sont celles de $\varphi(z)$ dans $\gamma\sigma(t_n)$; cette couronne est traversée par Γ qui s'éloigne à l'infini suivant un arc $\alpha_n\beta_n$ qui

a pour homologue dans γ l'arc

$$\widehat{A_n B_n} = \frac{\widehat{\alpha_n \beta_n}}{\sigma(t_n)},$$

$\sigma(t_n)$ croît indéfiniment avec n, il en résulte que l'arc $\alpha_n \beta_n$ s'éloigne indéfiniment sur Γ; comme cette dernière courbe est un chemin de détermination ω, on a sur $\alpha_n \beta_n$

$$|\varphi(z) - \omega| < \varepsilon_n,$$

ε_n tendant vers zéro, ce qui se traduit par

$$|\varphi_{t_n}(z) - \omega| < \varepsilon_n$$

sur $A_n B_n$. Les arcs continus $A_n B_n$ ont chacun un point sur toute circonférence C comprise entre C_1 et C_2; sur C l'ensemble de ces points a au moins un point limite; lorsque l'on fait croître le rayon de C de façon à lui faire balayer la couronne depuis C_1 jusqu'à C_2, ces points décrivent un *ensemble continu* allant de C_1 à C_2 qui est l'ensemble limite des arcs $A_n B_n$. En tout point de cet ensemble, la fonction limite de la suite a évidemment la valeur ω, elle se réduit donc dans toute la couronne à la constante ω. Ce résultat concorde avec celui trouvé, au même point du raisonnement, pour les fonctions entières : en supposant normale la famille des $f_t(z)$, toute suite de fonctions dont les indices t croissaient indéfiniment devait avoir pour limite la constante infinie (qui est valeur asymptotique pour toute fonction entière). Le raisonnement s'achèvera comme le précédent. On conclut de ce qui précède que t tendant vers l'infini, $\varphi_t(z)$ tend uniformément vers ω dans toute la couronne γ; par suite, $\varphi(z)$ tend uniformément vers ω quand z tend vers l'infini, ce qui est contraire au théorème de Weierstrass. Donc il est impossible que la famille $\varphi_t(z)$ soit normale dans γ. Il existe donc au moins un point z_0 dans toute couronne (C_1, C_2) où cette famille n'est pas normale. En prenant un cercle $\mathcal{C}_0$ de centre z_0, on en déduira *une bande* Δ *dans laquelle on est assuré que la fonction* $\varphi(z)$ *prend toute valeur finie ou infinie sauf peut-être deux valeurs exceptionnelles au plus.*

Si $\varphi(z)$ admet deux valeurs exceptionnelles dans tout le plan, ce sont ces valeurs qu'elle ne prend pas dans Δ, et par suite, elle

prend dans cette bande toutes les valeurs dont elle est susceptible. On peut même affirmer que toute valeur non exceptionnelle est prise une infinité de fois.

76. **Exemples.** — 1° Prenons la fonction méromorphe

$$\operatorname{th} z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1},$$

elle admet pour valeurs asymptotiques $+1$ sur l'axe réel positif et -1 sur l'axe réel négatif (ce sont aussi deux valeurs exceptionnelles). Dans le cas où C est une droite issue de l'origine $\sigma(t) = t$, il est aisé de voir en quels points la famille des $\varphi_t(z)$ est normale. Il suffit de répéter la même chose que pour la fonction exponentielle. La famille est normale en tout point situé à gauche ou à droite de l'axe imaginaire et cesse d'être normale en tout point de cet axe. Dans un angle quelconque autour de cet axe, elle prend toute valeur sauf $+1$ et -1.

On a des conclusions analogues pour $\operatorname{tang} z$.

2° Considérons la fonction elliptique ζz de Weierstrass; $2\omega_1$ et $2\omega_2$ étant les périodes, on a

$$\zeta(z + 2\omega_1) = \zeta z + 2\eta_1, \qquad \zeta(z + 2\omega_2) = \zeta z + 2\eta_2.$$

$\zeta(z)$ a pour pôles simples les points

$$W = 2h_1\omega_1 + 2h_2\omega_2,$$

h_1 et h_2 étant deux entiers quelconques positifs ou négatifs. z décrivant le périmètre d'un parallélogramme de périodes, ζz décrit un quadrilatère curviligne dont les côtés opposés se déduisent l'un de l'autre par translation (d'après les formules précédentes); z décrivant l'intérieur du parallélogramme, ζz décrit l'extérieur de ce quadrilatère curviligne puisqu'il y a un pôle dans le parallélogramme; z décrivant l'intérieur d'un autre parallélogramme de périodes contigu au premier, ζz décrit l'extérieur d'un quadrilatère curviligne contigu au précédent; donc z étant dans le parallélogramme formé par la réunion des deux précédents (ou dans tout parallélogramme équipollent), ζz prend toutes les valeurs.

Prenant pour C une courbe *quelconque* allant à l'infini, la

famille des

$$\zeta_t(z) = \zeta[z\sigma(t)]$$

ne peut être normale en aucun point du plan. En effet, $\mathfrak{D}_0$ étant un cercle quelconque, $\mathfrak{D}_0\sigma(t)$ grandissant indéfiniment avec t, finit par englober un nombre arbitrairement grand de parallélogrammes de périodes. Pour t suffisamment grand, $\zeta_t(z)$ a donc dans $\mathfrak{D}_0$ des pôles en nombre arbitrairement grand. La fonction limite pour une suite correspondant aux indices

$$t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots, \quad t_n \to +\infty$$

ne saurait donc être que la constante infinie (¹). Il faudrait alors que $\zeta_t(z)$ tende uniformément vers l'infini avec t, z étant dans $\mathfrak{D}_0$, ce qui est impossible puisqu'elle prend toutes les valeurs. Donc, dans toute bande Δ d'ouverture infiniment petite autour d'une courbe quelconque C du plan $\zeta(z)$ prendra toute valeur finie ou infinie, sans exception.

77. **Ensemble des points où la famille n'est pas normale.** — Les remarques à faire sont les mêmes qu'au n° 73 pour le cas d'une fonction entière. C'est un ensemble fermé admettant au moins un point sur tout cercle entourant l'origine. Il contient un continu qui peut être linéaire ou superficiel d'après les exemples précédents. Lorsque la fonction admet deux valeurs exceptionnelles, il est parfait.

Les racines des équations

$$\varphi(z) - a = 0$$

se prêtent aux mêmes remarques que celles des équations

$$f(z) - a = 0$$

dans la section précédente, en admettant la possibilité de *deux* valeurs exceptionnelles finies ou infinies.

78. **Étude de la fonction $\varphi(z)$ au voisinage du chemin Γ.** — On

(¹) Ceci n'est pas étonnant, ∞ étant valeur asymptotique sur un chemin rectiligne Γ parallèle à l'une des périodes, d'après les relations fondamentales.

peut choisir la courbe C de telle sorte que, z_0 étant un point de Γ, $z_0 C$ coïncide avec la portion de Γ allant de z_0 à l'infini. Pour ce choix de la fonction $\sigma(t)$, la famille des $\varphi_t(z)$ peut être normale ou non en z_0.

Premier cas : La famille est normale. — Choisissons le plus grand possible le cercle $\mathfrak{D}_0$ où cette famille est normale. Lorsque z décrit ce cercle, $z\sigma(t)$ décrit le cercle $\mathfrak{D}_0\sigma(t)$ dont le centre $z_0\sigma(t)$ est sur Γ et dont le rayon est à celui de $\mathfrak{D}_0$ dans le rapport $|\sigma(t)|$. Extrayons de la famille $\varphi_t(z)$ une suite infinie correspondant aux indices

$$t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots, \quad t_n \to +\infty.$$

Tout cercle $\mathfrak{D}_0\sigma(t_n)$ est parcouru par un arc de Γ qui passe en son centre, soit $\alpha_n\beta_n$; appelons $A_n B_n$ l'arc $\frac{\alpha_n\beta_n}{\sigma(t_n)}$ qui est homologue dans $\mathfrak{D}_0$. Sur $A_n B_n$, on a

$$|\varphi_{t_n}(z) - \omega| < \varepsilon_n,$$

ε_n tendant vers zéro quand n croît indéfiniment.

Toute suite d'arcs choisis parmi les $A_n B_n$ admet un ensemble limite possédant un point au moins sur chaque circonférence de centre z_0 intérieure à $\mathfrak{D}_0$. C'est un continu intérieur à $\mathfrak{D}_0$ en chaque point duquel la fonction limite d'une suite convergente extraite de la précédente prend la valeur ω; cette fonction limite est donc la constante ω. Il en résulte que, lorsque t tend vers l'infini, $\varphi(z)$ tend uniformément vers ω à l'intérieur de $\mathfrak{D}_0$. Autrement dit, $\varphi(z)$ *tend uniformément vers* ω *lorsque* z *tend vers l'infini en restant à l'intérieur de la bande* Δ *entourant* Γ et correspondant au cercle $\mathfrak{D}_0$.

Les racines $z_n(a)$ d'une équation

$$\varphi(z) - a = 0 \qquad (a \neq \omega)$$

sont donc, à partir d'une certaine valeur n_a, toutes extérieures à cette bande Δ. Cette valeur n_a dépend naturellement de a; mais si l'on se borne aux valeurs de a telles que l'on ait $|a - \omega| > \varepsilon$, on peut déterminer un cercle de centre O assez grand pour que, à l'extérieur de ce cercle, aucune racine d'une équation $f(z) - a = 0$ ne soit dans la bande Δ.

Deuxième cas : La famille n'est pas normale. — Alors, la courbe Γ est l'une de celles pour lesquelles on peut affirmer que dans toute bande Δ qui l'entoure, la fonction $\varphi(z)$ prend toute valeur sauf peut-être deux valeurs exceptionnelles au plus. Le chemin Γ sera donc limite pour les racines de toute équation

$$\varphi(z) - a = 0$$

(sauf peut-être deux valeurs exceptionnelles de a) en ce sens qu'il existe une suite de racines de cette équation pour lesquelles le rapport de la distance à Γ au module tend vers zéro.

IV. — FONCTIONS MÉROMORPHES SANS VALEUR ASYMPTOTIQUE.

79. Soit $w = \varphi(z)$ une fonction méromorphe sans valeur asymptotique; d'après les résultats de M. Iversen, la fonction inverse $z = \psi(w)$ n'a pas de singularité transcendante. Elle n'a, à l'infini comme à distance finie, que des pôles et des points critiques algébriques. La surface de Riemann sur laquelle $z = \psi(w)$ est uniforme a une infinité de feuillets, mais chacun n'est relié directement qu'à un nombre fini d'autres par un nombre fini de points de ramification algébriques. Par un nombre fini de coupures que nous relierons pour n'en former qu'une seule, isolons chaque feuillet. Sur un feuillet ainsi coupé, la fonction $z = \psi(w)$ est uniforme et z décrit une aire simplement connexe et tout entière à distance finie (puisque la fonction étant sans valeur asymptotique, z ne peut pas tendre vers ∞ lorsque w tend vers un point déterminé du feuillet coupé). *Le plan des z peut donc être décomposé en une infinité de polygones* dont chacun est la représentation conforme d'un feuillet de la surface de Riemann. Par suite, *dans chacun d'eux, $\varphi(z)$ prend toute valeur finie ou infinie.* Ces polygones pavent tout le plan sans omission ni répétition. C'est la généralisation de la décomposition du plan en parallélogrammes de périodes pour les fonctions elliptiques.

La propriété établie dans le cas des fonctions ayant une valeur asymptotique subsiste-t-elle pour les fonctions sans valeur asymptotique? Employant la même méthode, il faut former la famille des fonctions $\varphi_t(z) = \varphi[z\sigma(t)]$ et se demander s'il existe un point du plan où cette famille n'est pas normale. Pour répondre à cette ques-

tion, on pourra recourir à des considérations relatives à la croissance, ou à la distribution des zéros et des pôles. Si, par exemple, $\varphi(z)$ est une fonction elliptique, quel que soit le cercle $\mathfrak{D}_0$, $\mathfrak{D}_0\sigma(t)$ finira par contenir des parallélogrammes de périodes en nombre arbitrairement grand. Les zéros de $\varphi_t(z)$ situés dans $\mathfrak{D}_0$ correspondent à ceux de $\varphi(z)$ qui sont dans $\mathfrak{D}_0\sigma(t)$. Lorsque t augmente indéfiniment, ils finissent donc par être arbitrairement nombreux. Si la famille des $\varphi_t(z)$ était normale dans $\mathfrak{D}_0$, toute suite infinie convergente correspondant aux indices

$$t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n < \ldots, \quad t_n \to +\infty,$$

ne pourrait avoir pour limite que la constante *zéro*. Mais ce que nous avons dit des zéros est vrai aussi des pôles, et par suite la fonction limite ne pourrait être que la constante *infinie*. La famille ne peut donc être normale en aucun point du plan. Ce raisonnement montre comment on peut utiliser des renseignements sur la distribution des zéros des pôles. La conclusion était presque évidente : si l'on prend une courbe arbitraire C du plan et une bande Δ arbitrairement étroite autour de C, le cercle générateur de Δ finit par contenir des parallélogrammes de périodes; donc $\varphi(z)$ prend dans Δ toutes les valeurs sans exception (1).

80. Terminons en montrant par un exemple que la propriété n'appartient pas à toutes les fonctions sans valeur asymptotique. Soit $\varphi(Z)$ une fonction elliptique ayant les périodes $2\pi i$ et a (nombre réel positif). Posons

$$f(z) = \varphi(\log z),$$

$\varphi(Z)$ ayant la période $2\pi i$, $f(z)$ est uniforme. Elle est régulière ou présente un pôle en tout point où $\log z$ a une valeur finie; 0 et ∞ qui correspondent à la valeur ∞ du logarithme sont des points essentiels.

Par suite de la périodicité de $\varphi(Z)$, on a

$$\varphi(\log z + a) = \varphi(\log z),$$

(1) On trouvera sur ce sujet des renseignements plus précis dans le Mémoire : *Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières ou méromorphes* (2e Mémoire), par Gaston JULIA (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1920, Chap. III).

c'est-à-dire

$$f(ze^a) = f(z);$$

$f(z)$ est, comme $\varphi(Z)$, dénuée de valeur asymptotique.

Formons la famille

$$f_t(z) = f(zt) = \varphi(\log z + \log t) = \varphi(Z + \log t) = \varphi_t(Z),$$

t variant de 1 à $+\infty$, c'est-à-dire $\log t$ variant de 0 à $+\infty$.

z décrivant un cercle $\mathfrak{D}_0$, Z décrira une aire simplement connexe D_0 (si l'on a choisi une branche déterminée du logarithme), qui sera tout entière à l'intérieur d'un parallélogramme de périodes de $\varphi(Z)$ et même arbitrairement petite si $\mathfrak{D}_0$ a été choisi assez petit. t variant de 1 à $+\infty$, les valeurs de $Z + \log t$ constitueront une bande engendrée par la translation de D_0 parallèlement à l'axe réel. Les valeurs prises par $\varphi(Z)$ dans cette bande ne constituent qu'une partie des valeurs possibles. Représentées sur un plan W, elles laissent à découvert des aires; cela suffit pour affirmer que la famille des $\varphi_t(Z)$ est normale dans D_0, ou que la famille des $f_t(z)$ est normale dans $\mathfrak{D}_0$. Cette dernière famille est donc normale en tout point du plan z situé à distance finie et autre que l'origine.

Lorsque z décrit une droite OL issue de l'origine, Z décrit une parallèle à l'axe réel ou à la période a; il suffit de prendre la portion de cette droite intérieure à un parallélogramme de périodes pour avoir les valeurs correspondantes de $W = \varphi(Z) = f(z)$; elles constituent une courbe fermée $\mathfrak{C}$. Si maintenant nous faisons décrire à z l'intérieur d'un petit angle de sommet O, Z décrira une bande étroite parallèle à l'axe réel et W une bande étroite entourant la courbe $\mathfrak{C}$.

CHAPITRE VI.

APPROXIMATION DISCONTINUE RÉGULIÈRE DU POINT SINGULIER ESSENTIEL.

81. Comme dans le Chapitre précédent, nous supposerons, pour simplifier l'exposition, que le point singulier essentiel autour duquel nous étudions la fonction, est unique et situé à l'infini; nous parlerons donc de fonctions entières et de fonctions méromorphes.

Un premier mode d'approximation du point à l'infini est constitué par des nombres en progression géométrique :

$$z_0,\quad z_0\sigma,\quad z_0\sigma^2,\quad \ldots,\quad z_0\sigma^n,\quad \ldots,\quad \text{où}\quad |\sigma|>1.$$

Il est très analogue à l'approximation continue que nous venons d'étudier; nous lui consacrerons trois sections en l'appliquant aux fonctions entières, aux fonctions méromorphes ayant une valeur asymptotique et aux fonctions méromorphes sans valeur asymptotique.

Nous donnerons ensuite des indications sur d'autres modes réguliers d'approximation, par les nombres

$$z_0+p\omega \qquad (p=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$$

et

$$z_0+p\omega_1+q\omega_2 \qquad (p,q=0,\pm 1,\pm 2,\ldots).$$

I. — FONCTIONS ENTIÈRES.

82. A partir d'une fonction entière $f(z)$, et d'un nombre complexe σ de module plus grand que 1, formons la famille des fonctions

$$f_n(z)=f(z\sigma^n).$$

Les valeurs prises par la fonction $f_n(z)$ dans une couronne circulaire γ ou (C_1, C_2) ayant pour centre l'origine sont celles prises

par $f(z)$ dans la couronne $\gamma\sigma^n$ ou $(C_1\sigma^n, C_2\sigma^n)$. Si l'épaisseur de la couronne γ est assez grande (rapport des rayons de C_2 et C_1 supérieur à $|\sigma|$), l'ensemble de ces couronnes recouvrira tout l'extérieur du cercle C_1. Les valeurs prises par les $f_n(z)$ dans la couronne γ sont donc les valeurs prises par $f(z)$ à l'extérieur d'un certain cercle. D'après le théorème de M. Picard, ce sont toutes les valeurs finies sauf peut-être une valeur exceptionnelle.

Comme au Chapitre précédent, cherchons si la famille des $f_n(z)$ peut être normale dans γ. Nous allons voir qu'il n'en est rien en reprenant le raisonnement déjà employé n° 70. Supposons d'abord la famille normale, et soit

$$f_{n_1}(z), \quad f_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad f_{n_p}(z) \quad \ldots,$$

une suite uniformément convergente extraite de la famille. La fonction limite ne peut pas être une fonction holomorphe ni une constante finie, car les fonctions de la suite seraient bornées dans leur ensemble dans la couronne γ. On aurait pour toute valeur de p

$$|f_{n_p}(z)| < M \qquad \text{dans} \qquad \gamma,$$

c'est-à-dire

$$|f(z)| < M \qquad \text{dans} \qquad \gamma\sigma^{n_p}.$$

La fonction $f(z)$ serait bornée dans une infinité de couronnes concentriques, et puisqu'elle est holomorphe entre ces couronnes, elle le serait dans tout le plan. Il en résulte que si la famille est normale, toute suite convergente qui en est issue a pour limite la constante infinie. Dans cette dernière hypothèse, $f_n(z)$ tendrait uniformément vers l'infini avec n (pour z dans γ), et $f(z)$ croîtrait indéfiniment avec z (le raisonnement serait exactement le même qu'au n° 70). La famille $f_n(z)$ n'est donc pas normale dans γ. Cette conclusion (comme celle relative aux $f_t(z)$ du Chapitre précédent) nous donne en particulier le théorème de M. Picard : les $f_n(z)$ ne peuvent admettre deux valeurs exceptionnelles finies dans γ, car elles formeraient alors une famille normale; en revenant à $f(z)$, elle ne peut admettre deux valeurs exceptionnelles finies à l'extérieur de C_1. Mais notre résultat actuel n'est pas équivalent au

théorème de M. Picard, car une famille de fonctions holomorphes peut être normale sans admettre deux valeurs exceptionnelles. Il est aisé d'en tirer pour l'allure de $f(z)$ une conclusion plus précise. Il existe dans γ au moins un point z_0 où la famille $f_n(z)$ n'est pas normale. Soit $\mathfrak{D}_0$ un cercle arbitrairement petit autour de ce point; les fonctions $f_n(z)$ ne peuvent admettre deux valeurs exceptionnelles dans $\mathfrak{D}_0$; autrement dit, la fonction $f(z)$ prend toute valeur finie sauf peut-être une dans la région du plan formée par l'ensemble des aires $\mathfrak{D}_0$, $\mathfrak{D}_0\sigma$, $\mathfrak{D}_0\sigma^2$, ..., $\mathfrak{D}_0\sigma^n$, ... (et ceci quelque petit que soit le cercle $\mathfrak{D}_0$ pourvu qu'il ait z_0 pour centre).

83. *Étude de l'ensemble* $\mathfrak{C}_\sigma$. — Les fonctions $f_n(z)$ sont définies dans tout le plan; nous pouvons donc considérer l'ensemble des points z_0 du plan où la famille des

$$f_n(z) = f(z\sigma^n)$$

n'est pas normale. Nous appellerons $\mathfrak{C}_\sigma$ cet ensemble. Ce qui précède peut s'énoncer en disant que $\mathfrak{C}_\sigma$ possède au moins un point dans toute couronne de centre O dont le rapport des rayons est supérieur ou égal à $|\sigma|$. Il résulte de sa définition même que l'ensemble $\mathfrak{C}_\sigma$ est invariant par la substitution $(z, z\sigma)$, les fonctions $f_n(z)$ ne faisant que s'échanger entre elles; si z_0 est un point de $\mathfrak{C}_\sigma$, les points $z_0\sigma^k$ (k entier réel) lui appartiennent aussi. C'est un *ensemble fermé* d'après la définition même d'une famille normale en un point. L'origine et le point à l'infini qui sont points limites des $z_0\sigma^k$ appartiennent donc à $\mathfrak{C}_\sigma$. Pour l'origine, on peut le voir directement car toutes les fonctions $f_n(z)$ y prennent la même valeur $f(0)$, tandis que les dérivées $f'_n(z) = \sigma^n f'(z\sigma^n)$ y prennent les valeurs $\sigma^n f'(0)$ qui augmentent indéfiniment avec n [dans le cas où $f'(0)$ serait nulle, on considérerait la première des dérivées qui ne s'annule pas].

$\mathfrak{C}_\sigma$ étant fermé se compose en général d'un ensemble parfait et d'un ensemble dénombrable. Il est naturel de se demander s'il peut se réduire à l'un de ces deux ensembles composants. Cela revient à chercher si un point de $\mathfrak{C}_\sigma$ peut être isolé, et sous quelles conditions. Si le point z_0 est un point isolé de $\mathfrak{C}_\sigma$, dans tout cercle C de centre z_0 (et de rayon assez petit), la famille $f_n(z)$ est normale sauf au centre z_0. De toute suite de fonctions $f_n(z)$, on peut en

extraire une qui converge en tout point de C autre que z_0, et même uniformément dans la couronne (C, c), c étant un cercle arbitrairement petit concentrique à C. Si une telle suite convergente a pour fonction limite dans (C, c) une fonction holomorphe ou une constante finie, d'après le lemme de Weierstrass (2°, n° 35), cette suite converge uniformément vers une fonction holomorphe dans tout C, et en particulier au point z_0. Si cela a lieu pour toutes les suites convergentes dans la couronne, la famille sera normale en z_0. Pour que z_0 appartienne à $\mathcal{E}_\sigma$, il faut donc que le lemme de Weierstrass soit inapplicable à une suite au moins de la famille; il est nécessaire que cette suite converge dans la couronne vers l'infini, les fonctions de cette suite restant finies en z_0.

Pour certaines fonctions, cette hypothèse est à rejeter *a priori*. Par exemple, *si $f(z)$ ne prend nulle part la valeur a*, la famille des fonctions $\frac{1}{f_n(z)-a}$ est, tout comme celle des $f_n(z)$, une famille de fonctions holomorphes normale dans C sauf en z_0. A la suite S considérée plus haut, convergeant vers l'infini en dehors de z_0, correspondrait une suite S′, extraite des $\frac{1}{f_n(z)-a}$ et convergeant vers zéro en dehors de z_0; le lemme de Weierstrass serait applicable à S′, et par conséquent, elle convergerait vers zéro, même en z_0, et S convergerait vers ∞, même en z_0. Dans cette hypothèse, le fait pour la famille des $f_n(z)$ d'être normale dans C, sauf peut-être en z_0, entraîne nécessairement celui d'être normale, même en z_0; donc *l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ est alors parfait*.

84. La fonction

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\sigma^n}\right), \qquad \text{où} \qquad |\sigma|>1,$$

va nous fournir l'exemple d'un $\mathcal{E}_\sigma$ *dénombrable*. On a

$$f_n(z)=f(\sigma^n z)=(1-z)(1-\sigma z)\dots(1-\sigma^{n-1}z)f(z).$$

Soit Δ une aire finie du plan z ne contenant aucun des points σ^k (k entier réel) ni à son intérieur, ni sur sa frontière. Il existe un nombre positif δ tel que

$$|z-\sigma^k|>\delta$$

quel que soit z dans le domaine fermé Δ, et quel que soit l'entier k. Transformons l'expression de $f_n(z)$

$$f_n(z) = \sigma^{\frac{(n-1)n}{2}} (1 - z)(\sigma^{-1} - z)\dots(\sigma^{-n+1} - z) f(z),$$

d'où

$$|f_n(z)| > |\sigma|^{\frac{(n-1)n}{2}} \delta^n A$$

pour z dans Δ, A étant la borne inférieure de $|f(z)|$ dans ce domaine.

Cette inégalité s'écrit

$$|f(\sigma^n z)| > \left(\delta |\sigma|^{\frac{n-1}{2}}\right)^n A;$$

sous cette forme, on voit bien que, n grandissant indéfiniment, il en est de même de $\delta |\sigma|^{\frac{n-1}{2}}$, et du second membre entier. Donc, dans Δ, $f_n(z)$ tend uniformément vers l'infini avec n. En résumé, en tout point distinct des σ^k, $f_n(z)$ tend vers l'infini; en un point σ^k, $f_n(z)$ est nul à partir d'une certaine valeur de n. La famille cesse donc d'être normale en ces points et en ces points seulement. $\mathcal{E}_\sigma$ est fermé et dénombrable, il est formé des points σ^k et de leurs deux points limites o et ∞, ces deux derniers seuls n'étant pas isolés.

Lorsque la fonction entière $f(z)$ admet une *valeur asymptotique finie a, l'ensemble* $\mathcal{E}_\sigma$ *contient* (quel que soit σ) *un continu reliant l'origine au point à l'infini* (c'est-à-dire possédant un point au moins sur toute courbe fermée entourant l'origine). En effet, soit γ une couronne entourant l'origine. Le raisonnement fait au début de la présente section, n° 82, montre que si la famille des $f_n(z)$ est normale dans γ, la fonction $f(z)$, dans la couronne $\gamma\sigma^n$, tend vers l'infini avec n. Le chemin Γ, de détermination a traversant toutes les couronnes $\gamma\sigma^n$, ces dernières découpent sur lui des segments successifs sur lesquels $f(z)$ tendrait à la fois vers a (puisqu'ils s'éloignent indéfiniment sur Γ) et vers ∞ (puisqu'ils sont dans les couronnes $\gamma\sigma^n$), ce qui est absurde. Ce résultat s'applique en particulier à toute fonction ayant une valeur exceptionnelle finie.

Le raisonnement prouve seulement l'impossibilité pour la famille $f_n(z)$ d'être normale dans toute la couronne γ. Elle peut

être normale dans des parties de cette couronne, séparées les unes des autres par des continus où elle cesse de l'être. Prenons par exemple $f(z) = e^z$ et un nombre réel $\sigma > 1$,

$$f_n(z) = e^{z\sigma^n},$$
$$|f_n(z)| = e^{\sigma^n \mathcal{R} z},$$

l'exposant augmente indéfiniment avec le signe de $\mathcal{R}z$; la famille est donc normale dans la demi-couronne où $\mathcal{R}z > 0$, puisque $f_n(z)$ y tend vers l'infini; elle est de même normale dans la demi-couronne où $\mathcal{R}z < 0$ puisque $f_n(z)$ y tend vers zéro; elle n'est pas normale aux points de l'axe imaginaire qui sépare ces deux demi-couronnes. Soit $\mathfrak{D}_0$ un cercle ayant pour centre un point de l'axe imaginaire, il est impossible que toutes les fonctions $f_n(z)$ admettent dans ce cercle deux valeurs exceptionnelles finies; autrement dit, il est impossible que e^z admette dans l'ensemble des cercles $\mathfrak{D}_0$, $\mathfrak{D}_0\sigma$, ..., $\mathfrak{D}_0\sigma^n$, ..., deux valeurs exceptionnelles. C'est bien évident grâce à la périodicité de e^z; le cercle $\mathfrak{D}_0\sigma^n$ grandissant indéfiniment arrive à contenir une portion arbitrairement grande d'une bande où e^z prend toutes les valeurs sauf 0 et ∞.

85. Il est important de bien remarquer que *l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ dépend essentiellement de la valeur de σ pour la même fonction $f(z)$.*

Prenons pour exemple e^z :

1° Si σ est réel, $\mathcal{E}_\sigma$ est formé de l'axe imaginaire.

2° Soit

$$\sigma = \mathrm{S}\, e^{\frac{2\pi i}{p}}, \qquad \mathrm{S} = |\sigma| > 1; \qquad \sigma^n = \mathrm{S}^n\, e^{\frac{2n\pi i}{p}}.$$

Extrayons de la suite $f_n(z)$ une suite partielle correspondant à des indices congrus entre eux (mod p) :

$$n = kp + h \qquad (k = 1, 2, \ldots, \infty),$$
$$\sigma^{kp+h} = \mathrm{S}^{kp+h}\, e^{\frac{2h\pi i}{p}} = (\mathrm{S}^p)^k \sigma^h$$
$$f_{kp+h}(z) = e^{\sigma^h z (\mathrm{S}^p)^k}.$$

D'après ce qui précède, cette suite partielle est normale sauf aux

points où l'on a

$$\mathcal{R}(\sigma^h z) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \arg(\sigma^h z) = \pm \frac{\pi}{2},$$

c'est-à-dire

$$\arg z = -\frac{2h\pi}{p} \pm \frac{\pi}{2}.$$

Ces points forment une droite issue de l'origine, et dont la direction dépend de l'entier h; pour $h = 0$, c'est l'axe imaginaire; il suffit de donner p valeurs entières consécutives à h, et l'on obtient ainsi p droites si p est impair, $\frac{p}{2}$ seulement si p est pair. Ces droites constituent l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$: en un point de l'une d'elles, une suite partielle n'étant pas normale, la suite totale ne l'est pas non plus; en un point extérieur, chacune des p suites partielles étant normale, avec la limite 0 ou ∞, la suite obtenue par leur réunion est évidemment normale.

3° $\sigma = S e^{i\theta}$, $S > 1$, θ *incommensurable à* 2π.

Soit z_0 un point quelconque du plan, d'argument θ_0. On peut trouver une suite infinie d'entiers $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$, auxquels correspondent d'autres entiers $k_1, k_2, \ldots, k_p, \ldots$, tels que

$$\left| \frac{\pi}{2} - (\theta_0 + n_p \theta - 2k_p \pi) \right| < \varepsilon_p,$$

ε_p tendant vers zéro pour p infini; cette inégalité exprime que l'argument du point $z_0 \sigma^{n_p}$ tend vers $\frac{\pi}{2}$.

Prenons deux points arbitrairement voisins de z_0, l'un z_1 d'argument $\theta_0 - \varepsilon$, l'autre z_2 d'argument $\theta_0 + \varepsilon$; l'argument de $z_1 \sigma^{n_p}$ tendra vers $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$ et celui de $z_2 \sigma^{n_p}$ vers $\frac{\pi}{2} + \varepsilon$. Les modules tendront tous vers l'infini.

$e^{z_1 \sigma^{n_p}} = f_{n_p}(z_1)$ tendra vers l'infini, et $e^{z_2 \sigma^{n_p}} = f_{n_p}(z_2)$ tendra vers zéro. z_1 et z_2 étant arbitrairement voisins de z_0, $f_{n_p}(z)$ n'est pas normale en ce point, et la famille $f_n(z)$ non plus.

$\mathcal{E}_\sigma$ comprend donc, dans ce cas, tout le plan.

Au point de vue géométrique, ce dernier exemple montre que $\mathcal{E}_0$ peut être superficiel ou linéaire. Nous avons vu aussi un exemple où il était dénombrable et par conséquent discontinu.

Un autre exemple d'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ superficiel est fourni par la

fonction elliptique entière de Weierstrass

$$\sigma(z) = z \prod_{W}{}' \left(1 - \frac{z}{W}\right) e^{\frac{z}{W} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{W^2}},$$

où

$$W = 2h_1\omega_1 + 2h_2\omega_2,$$

$2\omega_1$ et $2\omega_2$ étant les périodes, h_1 et h_2 deux entiers réels prenant toutes les valeurs sauf la combinaison (0, 0).

Soient $\mathfrak{D}_0$ un cercle arbitraire, de centre z_0, et Σ un nombre complexe de module supérieur à 1. Nous considérerons la fonction $\sigma_n(z) = \sigma(z\Sigma^n)$ dans $\mathfrak{D}_0$, ou, ce qui revient au même, la fonction $\sigma(z)$ dans le cercle $\mathfrak{D}_n = \mathfrak{D}_0\Sigma^n$; n croissant indéfiniment, ce cercle finit par contenir un nombre arbitrairement grand de parallélogrammes de périodes, et, par suite, les zéros que possède $\sigma_n(z)$ dans $\mathfrak{D}_0$ sont en nombre croissant indéfiniment avec n, et sont denses dans tout $\mathfrak{D}_0$. Si la famille $\sigma_n(z)$ était normale, toute fonction limite devrait être identiquement nulle. En revenant à $\sigma(z)$, on voit que cette fonction, prise dans les cercles $\mathfrak{D}_n$, tendrait uniformément vers zéro. Cela est impossible sous les conditions très générales imposées à Σ (1).

86. Certaines fonctions entières que l'on est conduit à considérer à propos de l'itération des fonctions rationnelles fournissent des exemples où l'ensemble $\mathfrak{C}_\sigma$ est linéaire, mais de nature complexe, soit une courbe de Jordan simple, fermée, non analytique, sans tangente, soit une courbe de Jordan avec des points doubles partout denses sur elle-même ; on peut aussi obtenir des ensembles $\mathfrak{C}_\sigma$ parfaits discontinus (2).

87. **Racines des équations $f(z) - a = 0$.** — 1° *La fonction $f(z)$ admet dans tout le plan une valeur exceptionnelle finie a_0* (valeur qu'elle ne prend qu'en un nombre fini de points).

Dans un cercle arbitraire $\mathfrak{D}_0$ ayant pour centre un point z_0 de $\mathfrak{C}_\sigma$, les fonctions $f_n(z) = f(z\sigma^n)$ prennent toutes les valeurs a autres que a_0, et chaque valeur a est prise par une infinité de fonctions de la famille (sinon en laissant de côté un nombre fini de fonc-

(1) *Voir* la page 178 du Mémoire de M. Julia.

(2) *Voir* les pages 179 à 188 du Mémoire ci-dessus.

tions, les fonctions restantes formeraient une famille à deux valeurs exceptionnelles, donc une famille normale; la famille complète serait aussi normale). Donnons-nous une suite de nombres ε_p positifs, décroissants et tendant vers zéro; on peut leur faire correspondre des entiers n_p croissant constamment et indéfiniment, et tels que dans le cercle de centre z_0 et de rayon ε_p, la fonction $f_{n_p}(z) = f(z\sigma^{n_p})$ prenne la valeur a en un point ζ_p (au moins); on a alors

$$f(\zeta_p \sigma^{n_p}) = a.$$

Les nombres $\zeta_p \sigma^{n_p} = z_p$ sont des racines de l'équation

$$f(z) - a = 0$$

(sans être nécessairement toutes les racines), le rapport $\frac{z_p}{z_0 \sigma^{n_p}} = \frac{\zeta_p}{z_0}$ tend vers *un* pour p infini. Les nombres $z_0 \sigma^{n_p}$ constituent donc une approximation asymptotique des racines z_p,

Étant donné un point z_0 de $\mathfrak{C}_0$ choisi *a priori*, une fois pour toutes; a étant une valeur quelconque autre que a_0, parmi les racines de l'équation $f(z) - a = 0$, il y en a une infinité

$$z_1(a), \quad z_2(a), \quad \ldots, \quad z_p(a), \quad \ldots,$$

auxquelles correspondent des entiers n_1, n_2, ..., n_p, ... de manière que les nombres $z_0 \sigma^{n_p}$ tendent asymptotiquement vers les racines $z_p(a)$. Bien entendu, les entiers n_p dépendent du nombre a; mais, quel que soit a c'est toujours de la même suite $z_0 \sigma^n$, choisie *a priori*, qu'on peut extraire des valeurs s'approchant asymptotiquement d'une infinité de racines de $f(z) - a = 0$.

2° *La fonction $f(z)$ est quelconque.*

On a un résultat analogue, mais moins simple à cause du fait suivant : autour de z_0, la famille de $f_n(z)$, n'étant pas normale, admet au plus une valeur exceptionnelle finie : il peut ici y avoir une valeur exceptionnelle a_0 en chaque point z_0 de $\mathfrak{C}_\sigma$, cette valeur changeant avec le point z_0.

II. — FONCTIONS MÉROMORPHES AYANT UNE VALEUR ASYMPTOTIQUE

88. Soit $\varphi(z)$ une fonction méromorphe ayant la valeur asymptotique ω, correspondant au chemin Γ. Nous supposerons ω finie, ce

qui ne restreint pas la généralité, puisqu'on peut faire une transformation homographique sur $\varphi(z)$.

σ étant un nombre complexe $|\sigma|>1$, formons la famille $\varphi_n(z)=\varphi(z\sigma^n)$. Dans une couronne γ comprise entre deux cercles C_1 et C_2 de centre O, cette famille peut-elle être normale?

Les valeurs prises par $\varphi_n(z)$ dans γ sont celles que prend $\varphi(z)$ dans la couronne $\gamma\sigma^n$. Cette dernière couronne est traversée par Γ; soit $\alpha_n\beta_n$ l'arc de Γ intérieur à $\gamma\sigma^n$; l'arc homologue

$$\widehat{A_nB_n}=\frac{\widehat{\alpha_n\beta_n}}{\sigma_n}$$

traverse γ de C_1 à C_2. Les valeurs de $\varphi_n(z)$ sur ces arcs tendent uniformément vers ω. En raisonnant comme au Chapitre précédent, n° 75, on voit que toute suite convergente $\varphi_{n_p}(z)$, issue de la famille supposée normale, aurait nécessairement pour limite la constante ω. La fonction $\varphi_n(z)$, dans la couronne γ, tendrait uniformément vers ω pour n infini. Par suite $\varphi(z)$ tendrait uniformément vers ω lorsqu'on la considère dans la suite des couronnes $\gamma\sigma^n$. Si l'épaisseur de la couronne γ est suffisante (rapport des rayons de C_2 et C_1 au moins égal à $|\sigma|$), cette suite de couronnes couvre tout l'extérieur du cercle C_1; $\varphi(z)$ admettrait la limite unique ω pour z infini, ce qui est incompatible avec la singularité essentielle du produit à l'infini.

Il est donc établi que dans toute couronne d'épaisseur relative au moins égale à $|\sigma|$, il existe au moins un point z_0 où la famille $\varphi_n(z)$ n'est pas normale. Soit $\mathfrak{D}_0$ un cercle arbitrairement petit autour de ce point : les fonctions $\varphi_n(z)$ ne peuvent admettre trois valeurs exceptionnelles dans $\mathfrak{D}_0$; donc la fonction $\varphi(z)$ prend toute valeur, sauf au plus deux valeurs exceptionnelles dans le domaine formé par l'ensemble des cercles $\mathfrak{D}_0$, $\mathfrak{D}_0\sigma$, ..., $\mathfrak{D}_0\sigma^n$, ...

89. **Étude de l'ensemble $\mathfrak{E}_\sigma$.** — La fonction $\varphi(z)$ et le nombre σ étant donnés, les fonctions $\varphi_n(z)=\varphi(z\sigma^n)$ existent dans tout le plan de la variable z. Nous pouvons donc parler de l'ensemble $\mathfrak{E}_\sigma$ des points z_0 du plan où cette famille n'est pas normale. La conclusion qui précède peut s'énoncer ainsi : $\mathfrak{E}_0$ possède au moins un point dans toute couronne de centre O dont le rapport des rayons est supérieur ou égal à $|\sigma|$.

Cet ensemble est fermé, et invariant pour la substitution $(z, z\sigma)$, comme dans le cas des fonctions entières (n° 83). Pour l'étudier, nous commencerons encore par chercher si un point z_0 de $\mathcal{E}_0$ peut être isolé, et à quelles conditions.

Soient z_0 un point isolé de $\mathcal{E}_\sigma$ et C un cercle de centre z_0 ne contenant aucun autre point de $\mathcal{E}_0$. Soit $F(z)$ la fonction limite d'une suite convergente $\varphi_{n_i}(z)$ extraite de la famille : c'est une fonction méromorphe ou une constante finie ou infinie. On peut supposer que ce n'est pas la constante infinie à condition de faire, s'il y a lieu, une même transformation homographique à coefficients constants sur les $\varphi_{n_i}(z)$. Si ces fonctions, à partir d'un certain rang, sont holomorphes au voisinage de z_0, le lemme de Weierstrass permet d'affirmer que la suite converge, même en z_0, contrairement à l'hypothèse. Il faut donc que ce lemme soit inapplicable, c'est-à-dire que les fonctions $\varphi_{n_i}(z)$ admettent des pôles ayant z_0 pour point limite. Ceci peut avoir lieu de deux manières :

1° Ou bien une suite infinie extraite des φ_n et convergente autour de z_0 prend, dans le voisinage, toute valeur finie ou infinie sans aucune exception (alors quelle que soit la transformation homographique faite sur les φ_n, ces fonctions auront toujours une infinité de pôles);

2° Ou bien, si toute suite infinie convergente dans C, hors z_0, est telle que, dans un certain voisinage de z_0, aucune des fonctions ne prenne une certaine valeur a finie ou infinie (variable avec la suite en question), il faudra que, pour l'une au moins de ces suites, la limite soit précisément la constante a (de telle sorte que la transformation homographique qui évite l'infinité de pôles donne pour fonction limite la constante infinie).

Aucun point z_0 de $\mathcal{E}_\sigma$ ne pourra être isolé dans $\mathcal{E}_\sigma$ si, autour de chacun de ces points z_0, la famille des $\varphi_n(z)$ admet deux valeurs exceptionnelles distinctes a et b (variables avec le point z_0). D'après ce qui précède, il faudrait que la fonction limite soit à la fois la constante a et la constante b, ce qui est impossible.

En particulier, une fonction méromorphe $\varphi(z)$ à deux valeurs exceptionnelles a toujours un ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ parfait.

90. Citons un exemple où l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ est *dénombrable*. Il nous

sera fourni par la dérivée logarithmique de la fonction entière $f(z)$ du n° 84 qui nous a servi pour l'exemple analogue.

Posons

$$\varphi(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{q-z} + \ldots + \frac{1}{q^n - z} + \ldots,$$

q étant un nombre réel plus grand que 1. La série converge absolument et uniformément dans toute région qui ne contient aucun des pôles des termes successifs $(1, q, q^2, \ldots, q^n, \ldots)$. La somme de la série est une fonction méromorphe qui admet ces points pour pôles simples.

Elle satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\varphi(qz) = \frac{1}{1-qz} + \frac{1}{q}\varphi(z),$$

d'où l'on déduit les expressions de $\varphi_1(z)$, ..., $\varphi_n(z)$, ... en adoptant pour σ la valeur q :

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{1-qz} + \frac{1}{q}\varphi(z),$$

$$\varphi_2(z) = \frac{1}{1-q^2 z} + \frac{1}{q}\,\frac{1}{1-qz} + \frac{1}{q^2}\varphi(z),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{1-q^n z} + \frac{1}{q}\,\frac{1}{1-q^{n-1}z} + \ldots + \frac{1}{q^{n-1}}\,\frac{1}{1-qz} + \frac{1}{q^n}\varphi(z),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Posons

$$\psi_n(z) = \frac{1}{1-q^n z} + \frac{1}{q}\,\frac{1}{1-q^{n-1}z} + \ldots + \frac{1}{q^{n-1}}\,\frac{1}{1-qz}.$$

La relation précédente s'écrit

$$\varphi_n(z) = \psi_n(z) + \frac{1}{q^n}\varphi(z).$$

Dans une région finie Δ ne contenant aucun point q^k (k entier positif, nul ou négatif), ni l'origine, la fonction $\psi_n(z)$ tend uniformément vers zéro pour n infini. Il suffit pour le voir de partager cette somme en deux parties

$$\frac{1}{1-q^n z} + \frac{1}{q}\,\frac{1}{1-q^{n-1}z} + \ldots + \frac{1}{q^p}\,\frac{1}{1-q^{n-p}z}$$

et

$$\frac{1}{q^{p+1}}\,\frac{1}{1-q^{n-p-1}z}+\ldots+\frac{1}{q^{n-1}}\,\frac{1}{1-qz}.$$

On peut choisir l'entier p pour que la seconde partie soit arbitrairement petite, quel que soit $n>p$: en effet, l'expression

$$\frac{1}{1-q^k z}=\frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}-q^k}$$

est plus petite qu'un nombre fixe, car z restant dans Δ, $\frac{1}{z}$ reste aussi dans une région Δ' finie et ne contenant ni l'origine, ni aucun point q^k; donc

$$\left|\frac{1}{z}\right|<\lambda_1,\quad \left|\frac{1}{z}-q^k\right|>\lambda_2,$$

d'où

$$\left|\frac{1}{1-q^k z}\right|<\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\lambda.$$

La série

$$1+\frac{1}{q}+\ldots+\frac{1}{q^p}+\frac{1}{q^{p+1}}+\ldots+\frac{1}{q^n}+\ldots$$

étant convergente, on peut choisir p pour que la somme d'un nombre quelconque de termes à partir du $p^{\text{ième}}$ soit inférieure à $\frac{\varepsilon}{\lambda}$, l'expression en question est alors plus petite que ε.

p une fois choisi, la première partie contient un nombre fixe de termes tendant tous vers zéro quand n augmente indéfiniment. Donc $\psi_n(z)$ tend bien vers zéro. Il en est de même de $\varphi_n(z)$ puisque

$$\varphi_n(z)=\psi_n(z)+\frac{1}{q^n}\varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant holomorphe, et bornée par conséquent, dans Δ.

L'ensemble $\mathcal{E}_q$ ne contient donc aucun point en dehors des q^k et de leurs points limites. Il contient effectivement ces points, car les pôles de $\varphi_n(z)$ sont les points q^k, où k prend les valeurs de $-n$ à $-\infty$. Un point q^k est pôle pour les fonctions $\varphi_n(z)$ à partir d'un certain rang; comme en dehors de ce point ces fonctions tendent vers zéro, elles ne peuvent pas former une famille normale autour de ce point.

91. *Lorsque la fonction méromorphe $\varphi(z)$ possède deux valeurs asymptotiques distinctes a et b, l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ contient certainement* (quel que soit σ) *un continu reliant l'origine au point à l'infini.* Soit γ une couronne entourant l'origine dans laquelle la famille $\varphi_n(z)$ est supposée normale; d'après le raisonnement du n° 88, $\varphi(z)$ considérée dans les couronnes successives γ, $\gamma\sigma$, ..., $\gamma\sigma^n$, ... tendrait uniformément pour n infini vers a et vers b, ce qui est absurde. Donc dans toute couronne entourant l'origine, et par suite sur toute circonférence entourant l'origine, il y a au moins un point de $\mathcal{E}_\sigma$.

Au point de vue géométrique, l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ peut être discontinu, linéaire ou superficiel. La fonction $\varphi(z)$ précédente nous a donné l'exemple d'un $\mathcal{E}_\sigma$ discontinu et dénombrable. On peut former des exemples d'ensembles parfaits discontinus à l'aide des fonctions méromorphes qui se rattachent à l'itération des fonctions rationnelles.

Comme exemple d'ensemble linéaire, nous prendrons la fonction $\operatorname{th} z = \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}$; elle admet -1 et $+1$ comme valeurs exceptionnelles et asymptotiques, atteintes respectivement sur l'axe réel négatif et positif; σ étant réel et supérieur à 1, $\mathcal{E}_\sigma$ est formé de l'axe imaginaire. Le lecteur s'en rendra compte comme pour la fonction e^z, n° 85. L'ensemble linéaire peut être de nature beaucoup plus complexe.

La fonction elliptique $\zeta(z)$ de Weierstrass admet pour ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ tous les points du plan. Cela n'a rien d'étonnant puisque c'est la dérivée logarithmique de la fonction $\sigma(z)$ qui nous a fourni l'exemple analogue pour les fonctions entières.

Nous avons vu n° 76 que z décrivant un certain parallélogramme D (formé de parallélogrammes de périodes accolés), $\zeta(z)$ prenait toutes les valeurs. $\mathfrak{D}_0$ étant une aire quelconque du plan, $\mathfrak{D}_0\sigma^n$ contient, pour n assez grand, un parallélogramme équipollent à D tout entier; donc $\zeta(z)$ y prend toutes les valeurs. Le nombre des parallélogrammes tels que D contenus dans $\mathfrak{D}_0\sigma^n$ tend vers l'infini avec n. Les pôles de $\zeta_n(z)$ dans $\mathfrak{D}_0$, qui correspondent aux pôles de $\zeta(z)$ dans $\mathfrak{D}_0\sigma^n$, deviennent donc denses dans toute cette aire; si la famille était normale, toute fonction limite serait la constante infinie. Mais les zéros sont distribués comme les pôles;

et pour la même raison, toute fonction limite devrait être identiquement nulle (ou encore égale à une constante finie arbitraire). Cette contradiction nous montre que la famille $\zeta_n(z)$ n'est normale dans aucune région du plan, donc en aucun point.

92. **Racines des équations $\varphi(z) - a = 0$.** — z_0 étant un point de $\mathcal{E}_\sigma$, il y a une infinité de racines de l'équation $\varphi(z) - a = 0$ admettant asymptotiquement pour valeurs approchées une infinité de nombres de la suite $z_0\sigma^n$, sauf au plus pour deux valeurs exceptionnelles de a. L'analogie est complète avec le cas des fonctions entières (*voir* n° 87).

III. — FONCTIONS MÉROMORPHES SANS VALEUR ASYMPTOTIQUE.

93. Lorsqu'une fonction méromorphe n'admet aucune valeur asymptotique, l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ peut se réduire à l'origine et au point à l'infini (ce qui ne donne aucune des conséquences intéressantes développées ci-dessus).

Reprenons la fonction $f(z)$ considérée à la fin du Chapitre précédent (n° 80). Elle satisfait à l'équation fonctionnelle

$$f(qz) = f(z)$$

($q = e^a$ étant un nombre réel plus grand que 1). L'origine et le point à l'infini étaient des points singuliers essentiels isolés, sans valeur asymptotique. En prenant pour valeur de σ le nombre q, toutes les fonctions $f_n(z)$ coïncideront avec $f(z)$; donc la famille sera normale en tout point du plan (autre que 0 et ∞).

On peut cependant affirmer un résultat plus précis que le théorème de M. Picard. En se reportant à la fonction elliptique $\varphi(Z)$ d'où $f(z)$ a été tirée, on voit que *dans une couronne* (C, Cq) du plan z, qui correspond à un parallélogramme de périodes du plan Z, *la fonction prend toute valeur finie ou infinie;* elle prend même chacune d'elles un nombre de fois égal à l'ordre de la fonction elliptique $\varphi(Z)$. Le théorème de M. Picard était relatif à l'extérieur d'un cercle, c'est-à-dire à un domaine infini.

Pour toute fonction méromorphe $f(z)$ dénuée de valeur asymptotique, le plan z peut être découpé en polygones finis et contigus

dans chacun desquels $f(z)$ prend toute valeur finie ou infinie. Cette division du plan permet de réduire le domaine comme dans l'exemple ci-dessus.

94. L'existence de l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ pour certaines fonctions sans valeur asymptotique peut s'établir par des considérations sur la distribution des zéros ou sur la croissance.

Supposons la famille des $f_n(z) = f(z\sigma^n)$ normale en tout point z_0 du plan (autre que o et ∞). La suite des valeurs $Z_n = f_n(z_0)$ peut être dense dans tout le plan ou ne pas l'être.

Premier cas : La suite Z_n n'est pas dense dans tout le plan. — Si ces valeurs ne s'approchent pas de ∞, il existe un nombre M tel que

$$|f_n(z_0)| < M$$

quel que soit n.

Si ces valeurs ne s'approchent pas du nombre a, il existe un nombre ε non nul tel que

$$|f_n(z_0) - a| > \varepsilon$$

ou

$$\left|\frac{1}{f_n(z_0) - a}\right| < \frac{1}{\varepsilon},$$

toujours quel que soit n. Donc la famille des $f_n(z)$, ou celle des $\varphi_n(z) = \frac{1}{f_n(z) - a}$, est normale dans tout le plan (sauf o et ∞) et est bornée en z_0. Dans un domaine quelconque Δ comprenant z_0 mais laissant o et ∞ à l'extérieur, le nombre des pôles d'une fonction quelconque de la famille est limité (la limite N dépend naturellement de la région Δ; théorème sur les familles normales, n° 52). Prenons pour Δ une couronne limitée par deux cercles ayant pour centre l'origine et pour rayons respectifs r et R ($r < R$). Les pôles de $\varphi_n(z)$ sont les racines de l'équation

$$f_n(z) - a = o \quad \text{ou} \quad f(z\sigma^n) - a = o;$$

chaque racine de cette équation située dans la couronne Δ correspond à une racine de $f(z) - a = o$ située dans $\Delta\sigma^n$. Dans l'hypothèse où nous sommes, le nombre des racines de l'équation

$$f(z) - a = o$$

situées dans l'une des couronnes $\Delta\sigma^n$ admet une même limite supérieure dépendant de Δ et indépendante de n, soit $N(r, R)$. Si l'on considère maintenant toutes les couronnes de même épaisseur relative, le nombre des racines de l'équation situées dans l'une quelconque de ces couronnes ne dépasse pas une limite fixe $N_1\left(\frac{R}{r}\right)$. Il suffit de considérer une couronne Δ correspondant à des rayons r_0 et R_0 satisfaisant à l'inégalité

$$\frac{R_0}{r_0} > |\sigma| \frac{R}{r}.$$

Deux couronnes consécutives $\Delta\sigma^n$ et $\Delta\sigma^{n+1}$ empiètent l'une sur l'autre et leur partie commune est une couronne dont le rapport des rayons est

$$\frac{R_0 |\sigma|^n}{r_0 |\sigma|^{n+1}} = \frac{R_0}{r_0 |\sigma|} > \frac{R}{r}.$$

Il en résulte que toute couronne dont le rapport des rayons est $\frac{R}{r}$ se trouve comprise à l'intérieur d'une couronne $\Delta\sigma^n$. Le nombre des racines de l'équation $f(z) - a = 0$ situées dans une telle couronne est donc moindre que celui des racines situées dans l'une des couronnes $\Delta\sigma^n$, il admet donc une limite supérieure finie.

Il existe un cercle entourant l'origine dans lequel l'équation $f(z) - a = 0$ n'a pas de racine (sauf peut-être l'origine elle-même); soit r_0 le rayon de ce cercle. L'extérieur de ce cercle peut être décomposé en couronnes consécutives d'épaisseur relative $|\sigma|$; dans chacune d'elles, le nombre des racines de l'équation considérée admet la même limite N. Soient ε un exposant positif quelconque; et

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_i, \quad \ldots$$

la suite des racines rangées par modules croissants. La série

$$\sum \frac{1}{|z_i|^\varepsilon}$$

est convergente. En effet, les racines comprises dans chaque couronne étant en nombre au plus égal à N, on majore cette série en lui substituant

$$\frac{N}{r_0^\varepsilon} + \frac{N}{(r_0|\sigma|)^\varepsilon} + \frac{N}{(r_0|\sigma|^2)^\varepsilon} + \ldots + \frac{N}{(r_0|\sigma|^n)^\varepsilon} + \ldots$$

Cette dernière est une série géométrique de raison $\frac{1}{|\sigma|^{\varepsilon}} < 1$, donc convergente. La série considérée est donc convergente quelque petit que soit ε.

Mettons la fonction méromorphe $f(z)$ sous la forme du quotient de deux fonctions entières

$$f(z) = \frac{G(z)}{G_1(z)}.$$

Les racines de

$$f(z) - a = 0$$

sont les zéros de la fonction entière $G(z) - aG_1(z)$. Cette fonction est donc d'ordre nul. Il résulte de cette étude que si, pour une certaine valeur a, la fonction $G(z) - aG_1(z)$ n'est pas d'ordre nul, on peut affirmer :

1° Ou bien que l'ensemble $\mathfrak{C}_\sigma$ existe;

2° Ou bien que, quel que soit le point z_0 du plan (autre que 0 et ∞), la suite des valeurs $f(z_0)$, $f(z_0\sigma)$, ..., $f(z_0\sigma^n)$, ... admet a pour une de ses limites.

93. *Deuxième cas : Quel que soit le point z_0, la suite $Z_n = f(z_0\sigma^n)$ est dense dans tout le plan.* — Soit une valeur quelconque a finie ou infinie; il existe une suite

$$f_{n_1}(z), \quad f_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad f_{n_p}(z), \quad \ldots,$$

qui converge uniformément dans tout domaine fini ne contenant pas l'origine, vers une fonction limite méromorphe (pouvant être constante) prenant en z_0, la valeur a :

1° Si la limite est constante, il peut se faire que les fonctions $f_{n_p}(z)$ ne prennent pas, au voisinage de z_0, la valeur a; mais alors, quel que soit le domaine $\mathfrak{D}_0$ entourant z_0 et dans lequel les $f_{n_p}(z)$ ne prennent pas la valeur a, $f(z)$ tendra uniformément vers a dans les domaines $\mathfrak{D}_0\sigma^{n_p}$ lorsque p tendra vers l'infini.

2° Si la limite n'est pas constante, elle prend en z_0 la valeur a; par suite, dans un cercle arbitrairement petit contenant z_0, les fonctions $f_{n_p}(z)$ prennent toutes, pour $p \geq p_0$, la valeur a; autrement dit, quelque petit que soit le domaine $\mathfrak{D}_0$ entourant z_0, la fonction $f(z)$ prend une infinité de fois la valeur a dans l'ensemble des domaines $\mathfrak{D}_0\sigma^{n_p}$.

En résumé, *si la famille des* $f_n(z) = f(z\sigma^n)$ *est normale dans tout le plan* (hors o et ∞), en considérant un domaine quelconque $\mathfrak{D}_0$ ne contenant pas l'origine et les domaines $\mathfrak{D}_0\sigma^n$:

1° *Ou bien* $f(z)$ *prend dans l'ensemble des domaines* $\mathfrak{D}_0\sigma^n$ *toute valeur finie ou infinie sans exception.* Ceci se produit en particulier lorsqu'il n'y a aucune constante parmi les fonctions limites de la famille $f_n(z)$. Tout point du plan jouit alors de la propriété remarquable des points de $\mathfrak{C}_\sigma$ sans que la famille $f_n(z)$ cesse d'y être normale ;

2° *Ou bien, s'il y a des valeurs exceptionnelles, que* $f(z)$ *ne prend dans aucun des domaines* $\mathfrak{D}_0\sigma^n$ (ou n'y prend qu'un nombre fini de fois), *chacune de ces valeurs est une constante limite de la famille* $f_n(z)$ *vers laquelle* $f(z)$ *tend uniformément dans une suite de domaines* $\mathfrak{D}_0\sigma^{n_p}$ *lorsque p devient infini.*

IV. — AUTRES MODES RÉGULIERS D'APPROXIMATION.

96. **Approximation par les points** $z + n\omega$. — $f(z)$ étant une fonction entière ou méromorphe, formons la famille

$$f_n(z) = f(z + n\omega),$$

ω étant un nombre complexe donné et n un entier arbitraire.

Existe-t-il un ensemble E_ω de points où cette famille n'est pas normale ? Il est certainement impossible d'obtenir des théorèmes aussi généraux qu'avec le mode d'approximation employé précédemment, car si ω est une période pour la fonction $f(z)$, toutes les fonctions de la famille coïncident et la famille est donc normale dans tout le plan.

Dans le cas de la fonction exponentielle, E_ω n'existe pour aucune valeur de ω. En effet

$$f_n(z) = e^{z+n\omega} = e^{n\omega} f(z).$$

Si $\mathfrak{R}\omega > 0$, dans toute aire du plan, $f_n(z)$ tend uniformément

(1) Pour une étude plus approfondie, *voir* JULIA, *Annales de l'Éc. N. S.*, 1920, p. 203 à 210.

vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, et vers o lorsque n tend vers $-\infty$.

Si $\mathfrak{R}\omega < 0$, les conclusions sont inverses.

Si $\mathfrak{R}\omega = 0$, $|f_n(z)| = |f(z)|$; dans une aire finie du plan, toutes les fonctions de la famille sont bornées en module.

Dans tous les cas, la famille est normale.

Lorsque l'ensemble E_ω existe, la conclusion à laquelle on aboutit est plus précise qu'avec le mode d'approximation précédent. C'est dans l'ensemble des domaines $\mathfrak{D}_0 + n\omega$ (n, entier réel), tous infiniment petits comme $\mathfrak{D}_0$, qu'on peut affirmer que $f(z)$ prend une infinité de fois toute valeur sauf peut-être une [lorsque $f(z)$ est fonction entière] ou deux [lorsque $f(z)$ est méromorphe].

L'approximation simultanée des racines des équations

$$f(z) - a = 0$$

est une approximation ordinaire et non plus asymptotique : quel que soit a, il existe une infinité de racines $z_1(a)$, $z_2(a)$, ..., $z_n(a)$, ... de cette équation auxquelles correspondent des points $z_0 + p_1\omega$, $z_0 + p_2\omega$, ..., $z_0 + p_n\omega$, ..., tels que

$$|z_n(a) - (z_0 + p_n\omega)|$$

tende vers o pour n infini (la suite des p_n dépend de a).

97. **Approximation par les points $z + p\omega_1 + q\omega_2$.** — Nous partons de deux nombres complexes ω_1 et ω_2 dont le rapport n'est pas réel. En donnant à p et q toutes les valeurs entières, les points $z + p\omega_1 + q\omega_2$ forment les sommets d'un réseau de parallélogrammes. Envisageons la famille des fonctions à double indice

$$f_{p,q}(z) = f(z + p\omega_1 + q\omega_2).$$

Nous appellerons E_{ω_1,ω_2} l'ensemble des points où cette famille n'est pas normale. Cet ensemble n'existe pas toujours : si $f(z) = e^z$, il n'existe pour aucune valeur de ω_1 et ω_2; si $f(z)$ est doublement périodique et admet les périodes ω_1 et ω_2, toutes les fonctions sont identiques et la famille est partout normale.

Lorsque cet ensemble existe, les conclusions qu'on en tire sont fort intéressantes; en particulier, on a une approximation simul-

tanée d'une infinité de racines de toutes les équations $f(z)-a=0$ (sauf au plus pour deux valeurs de a), par des sommets d'un même réseau de parallélogrammes.

98. L'existence de E_{ω_1,ω_2} peut s'établir parfois en utilisant la notion d'ordre (relative à la distribution des zéros). Supposons que E_{ω_1,ω_2} n'existe pas. z_0 étant un point quelconque du plan, considérons *la suite des nombres* $Z_{p,q}=f_{p,q}(z_0)$.

1° Elle peut être *dense dans tout le plan des* Z, *quel que soit* z_0. $f(z)$ peut approcher indéfiniment de toute valeur finie ou infinie, aux sommets d'un réseau du parallélogramme de périodes (ω_1, ω_2) construit à partir d'une origine quelconque du plan.

2° Sinon, *il existe un point* z_0 *au moins tel que la suite des* $Z_{p,q}$ *ne soit pas dense dans tout le plan* Z.

Si ces valeurs sont bornées (ne s'approchant pas de ∞), il existe un nombre M tel que

$$|f_{p,q}(z_0)|<M,$$

quels que soient p et q. Si elles ne s'approchent pas du nombre a, il existe un nombre ε tel que

$$|f_{p,q}(z_0)-a|>\varepsilon \qquad \text{ou} \qquad \left|\frac{1}{f_{p,q}(z_0)-a}\right|<\frac{1}{\varepsilon},$$

quels que soient p et q. En considérant suivant le cas la famille de fonctions méromorphes $f_{p,q}(z)$ ou $\frac{1}{f_{p,q}(z)-a}$, on voit que cette famille, normale dans tout le plan par hypothèse, est bornée en module en z_0. Dans un parallélogramme de périodes contenant z_0, le nombre des pôles de toute fonction de la famille est limité supérieurement par un nombre fixe.

Il en résulte que *dans un parallélogramme de périodes quelconque, il ne peut exister qu'un nombre de pôles de* $f(z)$, *ou de racines de* $f(z)-a=0$, *inférieur à un nombre fixe* M.

Soit Q l'aire d'un parallélogramme de périodes. Un cercle de centre O et de rayon r contient un nombre de parallélogrammes asymptotiquement égal à $\frac{\pi r^2}{Q}$; le nombre $N(r)$ des racines que l'équation $f(z)-a=0$ admet dans ce cercle ne peut donc surpasser

asymptotiquement $\frac{\pi r^2 M}{Q}$. L'ordre de croissance de $N(r)$ par rapport à r ne peut pas dépasser 2.

En désignant par $z_n(a)$ les racines de $f(z) - a = 0$, on peut voir directement que la série

$$\sum \frac{1}{|z_n(a)|^\rho}$$

converge pour $\rho > 2$. On majore en effet la série précédente en remplaçant les points $z_n(a)$ situés dans un parallélogramme de périodes par M points confondus avec le sommet le plus voisin de l'origine, et la série

$$\sum_{p,q} \frac{1}{(z_0 + p\omega_1 + q\omega_2)^\rho}$$

est convergente pour $\rho > 2$. Donc, l'ordre de la suite $z_n(a)$ ne peut pas dépasser 2. Ceci est également vrai de toute valeur dont les $Z_{p,q}$ ne s'approchent pas indéfiniment; en particulier, la propriété subsiste pour tout nombre b assez voisin de a.

Pour une fonction méromorphe d'ordre ρ, il y a au plus deux valeurs de a pour lesquelles la suite des racines de l'équation

$$f(z) - a = 0$$

est d'ordre différent de ρ (1). Donc, dans l'hypothèse où les $Z_{p,q}$ ne sont pas denses dans tout le plan, *l'ordre de $f(z)$ ne surpasse pas 2.*

Pour toute fonction méromorphe d'ordre plus grand que 2 :

1° Ou bien pour toute valeur z_0, la suite $Z_{p,q}$ est dense dans tout le plan Z, et *les valeurs de $f(z)$ aux sommets d'un réseau quelconque de parallélogrammes (ω_1, ω_2) s'approchent autant qu'on veut de toute valeur finie ou infinie;*

2° Ou bien il existe un ensemble E_{ω_1, ω_2} (invariant par les translations $p\omega_1 + q\omega_2$) de points où la famille $f_{p,q}(z)$ n'est pas normale. *Si petite que soit l'aire $\mathcal{D}_0$ entourant un tel point z_0, la fonction $f(z)$ prend une infinité de fois dans l'ensemble des*

---

(1) Borel, *Leçons sur les Fonctions méromorphes*, p. 66.

aires $\mathfrak{D}_0 + p\omega_1 + q\omega_2$ (p, q, entiers réels) *toute valeur finie ou infinie, sauf peut-être deux au plus.*

Comme dans l'approximation par $z + p\omega$, *la suite des sommets du réseau* $z_0 + p\omega_1 + q\omega_2$ *s'approche indéfiniment d'une infinité de racines de toute équation* $f(z) - a = 0$, *non exceptionnelle.*

99. Dans le cas où les $Z_{p.q}$ sont denses dans tout le plan Z, on peut appliquer le raisonnement fait au n° 95, et l'on voit ainsi que $\mathfrak{D}_0$ étant un domaine quelconque :

1° *Ou bien* $f(z)$ *prend dans l'ensemble des domaines* $\mathfrak{D}_0 + p\omega_1 + q\omega_2$ *toute valeur sans exception* (c'est le cas lorsqu'il n'y a aucune constante parmi les fonctions limites de la famille $f_{p.q}$; tout point du plan jouit de la propriété des points de $E_{\omega_1.\omega_2}$);

2° *Ou bien, s'il y a des valeurs exceptionnelles que* $f(z)$ *ne prend dans aucun des domaines* $\mathfrak{D}_0 + p\omega_1 + q\omega_2$ (ou n'y prend qu'un nombre fini de fois), *chacune de ces valeurs est une constante limite pour la famille* $f_{p.q}(z)$, *et* $f(z)$ *tend uniformément vers cette limite dans une certaine suite de domaines* $\mathfrak{D}_0 + p_n\omega_1 + q_n\omega_2$, allant à l'infini.

CHAPITRE VII.

APPROXIMATION DISCONTINUE IRRÉGULIÈRE DU POINT SINGULIER ESSENTIEL.

100. Nous nous donnons arbitrairement une suite de nombres complexes

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots,$$

σ_n tendant vers l'infini avec n. Nous nous proposons d'étudier la famille des fonctions

$$f_n(z) = f(z\sigma_n)$$

déduite d'une fonction entière ou méromorphe donnée $f(z)$ [1]: Nous nous proposons en particulier de voir s'il existe des points où cette famille n'est pas normale. Il y a évidemment l'origine puisque toutes les fonctions y prennent la même valeur $f(0)$ et les dérivées premières $f_n'(0) = \sigma_n f'(0)$ croissent indéfiniment [si $f'(0) = 0$, il suffit de prendre la première des dérivées qui ne s'annule pas à l'origine]. Il peut arriver que la famille soit normale en tout autre point du plan à distance finie.

Supposons cette hypothèse réalisée pour une fonction entière. Un raisonnement employé au Chapitre précédent va nous montrer que toute fonction limite de la famille coïncide avec la constante infinie. Prenons une couronne γ entourant l'origine, et une suite

$$f_{n_1}(z), \quad f_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad f_{n_p}(z), \quad \ldots$$

uniformément convergente dans γ. Si elle tendait vers une fonction holomorphe ou une constante finie; toutes les fonctions de cette suite seraient bornées dans leur ensemble dans γ, c'est-à-dire qu'on

[1] JULIA, *Les fonctions entières et la croissance* (*Comptes rendus Acad. Sc.*, t. 168, 1919, p. 1097). *Voir* aussi *Annales de l'É. N. S.*, 1921, p. 165-181.

aurait

$$|f_{n_p}(z)| = |f(z\sigma_{n_p})| < M$$

pour z dans γ; autrement dit,

$$|f(z)| < M$$

pour z dans $\gamma\sigma_{n_p}$. La fonction entière étant bornée dans une suite de couronnes s'emboîtant l'une dans l'autre serait bornée dans tout le plan et se réduirait à une constante.

101. Premier théorème général. — *Si la fonction entière ou méromorphe $f(z)$ admet au moins deux valeurs asymptotiques, l'ensemble* E *des points où la famille n'est pas normale possède un point au moins sur toute courbe entourant l'origine.*

Le mode de raisonnement est toujours le même. Supposons la famille normale dans toute une couronne γ entourant l'origine; et soit

$$f_{n_1}(z), \quad f_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad f_{n_p}(z), \quad \ldots$$

une suite uniformément convergente issue de la famille. Les valeurs prises par $f_n(z)$ dans γ sont celles que prend $f(z)$ dans la couronne $\gamma\sigma_n$; cette couronne est traversée par le chemin de détermination ω suivant un arc $\alpha_n\beta_n$ dont nous prenons l'homologue A_nB_n dans la couronne γ; si nous considérons la fonction $f_{n_p}(z)$ sur l'arc $A_{n_p}B_{n_p}$, sa valeur tend vers ω lorsque p (et par suite n_p) croît indéfiniment; donc sur l'ensemble limite des arcs $A_{n_p}B_{n_p}$, la fonction limite de la suite prend la valeur ω; cet ensemble limite étant un continu joignant la courbe intérieure à la courbe extérieure de la couronne γ, la fonction limite serait égale à la constante ω dans tout γ. Pour une raison analogue, cette fonction limite est égale à la seconde valeur asymptotique ω', ce qui est absurde. Notre hypothèse est donc inadmissible; et il existe dans toute couronne γ (donc aussi sur toute courbe entourant l'origine) un point au moins où la famille $f_n(z)$ n'est pas normale.

Applications. — Les valeurs exceptionnelles étant toujours des valeurs asymptotiques, l'ensemble E existe quelle que soit la suite $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$ pour toute fonction méromorphe ayant

deux valeurs exceptionnelles et pour toute fonction entière ayant une valeur exceptionnelle finie. Ceci peut résulter aussi de la remarque faite sur les fonctions entières : si a est valeur exceptionnelle, $\frac{1}{f(z)-a}$ est une fonction entière; la famille

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{f_n(z)-a}$$

est normale aux mêmes points que la famille $f_n(z)$, et les suites convergentes se correspondent; les fonctions limites correspondantes de deux suites $f_{n_p}(z)$ et $\varphi_{n_p}(z)$ devraient être toutes les deux la constante infinie, ce qui est impossible.

102. Second théorème général. — Au lieu d'utiliser l'existence de valeurs asymptotiques, on peut aussi employer, pour établir l'existence de l'ensemble E, des considérations relatives à l'ordre de la fonction $f(z)$, supposée entière.

Soient

$$z_1(a), \quad z_2(a), \quad \ldots, \quad z_p(a), \quad \ldots$$

les racines de l'équation

$$f(z)-a=0,$$

rangées dans l'ordre des modules croissants. Les points limites de la suite à deux indices (n et p)

$$\frac{z_p(a)}{\sigma_n}$$

jouent un rôle fondamental. Parmi ces points limites figurent toujours 0 et ∞, comme on le voit en faisant croître indéfiniment n seul ou p seul.

Si, pour une valeur finie de a, les $\frac{z_p(a)}{\sigma_n}$ ont un point limite autre que 0 et ∞, la famille $f_n(z)$ n'est pas normale dans tout le plan. En particulier, il existe un point de E dans toute couronne γ entourant l'origine et contenant un point limite M des

$$\frac{z_p(a)}{\sigma_n}.$$

Supposons en effet la famille normale dans γ. Il y a une infinité

de points

$$\zeta_1 = \frac{z_{p_1}(a)}{\sigma_{n_1}}, \qquad \zeta_2 = \frac{z_{p_2}(a)}{\sigma_{n_2}}, \qquad \ldots, \qquad \zeta_q = \frac{z_{p_q}(a)}{\sigma_{n_q}}, \qquad \ldots$$

tendant vers M. D'après la définition des $z_p(a)$, on a

$$a = f[z_{p_q}(a)] = f(\zeta_q \sigma_{n_q}) = f_{n_q}(\zeta_q).$$

De la suite $f_{n_1}(z)$, $f_{n_2}(z)$, $\ldots$, $f_{n_q}(z)$, $\ldots$, on peut extraire une suite uniformément convergente dans γ; les fonctions de cette nouvelle suite prendront la valeur a en ceux des points ζ_q qui leur correspondent, c'est-à-dire en une infinité de points tendant vers M; la fonction limite prendra en M la valeur a. Or, d'après la remarque faite au début du Chapitre, elle devrait coïncider avec la constante infinie. Il y a donc contradiction; il y a dans la couronne γ un point au moins où la famille n'est pas normale.

103. *Applications :* 1° *La croissance des σ_n n'est pas très rapide.*

Posons

$$\Sigma_n = |\sigma_n|, \qquad r_p = |z_p(a)|.$$

S'il existe un nombre fixe M tel que

$$\log \Sigma_{n+1} - \log \Sigma_n < M,$$

l'ensemble E existe, quelle que soit la croissance des r_p, c'est-à-dire quelle que soit la fonction entière $f(z)$. En effet, chaque r_p s'insère dans l'intervalle de deux Σ_n consécutifs (plusieurs r_p peuvent tomber dans le même intervalle :

$$\Sigma_{n_p} \leqq r_p \leqq \Sigma_{n_p+1},$$
$$\log \Sigma_{n_p} \leqq \log r_p \leqq \log \Sigma_{n_p+1};$$

d'où

$$0 \leqq \log r_p - \log \Sigma_{n_p} \leqq \log \Sigma_{n_p+1} - \log \Sigma_{n_p},$$
$$0 \leqq \log \frac{r_p}{\Sigma_{n_p}} < M,$$
$$1 \leqq \frac{r_p}{\Sigma_{n_p}} < e^M.$$

A chaque $z_p(a)$, on peut donc associer un σ_{n_p} tel que le module

de $\frac{z_p(a)}{\sigma_{n_p}}$ soit compris entre deux limites fixes. Les points représentatifs de ces $\frac{z_p(a)}{\sigma_{n_p}}$ formeront une infinité de points situés dans une couronne circulaire où ils ont un point limite au moins. Le second théorème est donc applicable.

Il est clair que l'approximation régulière étudiée au Chapitre précédent rentre dans ce cas; car si $\sigma_n = \sigma^n$, on a $\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} = \sigma$, et

$$\log \Sigma_{n+1} - \log \Sigma_n = \log |\sigma|,$$

nombre fixe.

2° *Les zéros ne sont pas trop rares.*

S'il existe un nombre fixe M tel que

$$\log r_{p+1} - \log r_p < M,$$

l'ensemble E existe, quelle que soit la croissance des Σ_n, c'est-à-dire quelle que soit la suite $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$. En effet, chaque Σ_n s'insère dans l'intervalle de deux r_p consécutifs :

$$r_{p_n} \leq \Sigma_n \leq r_{p_n+1};$$

d'où l'on tire

$$1 \leq \frac{\Sigma_n}{r_{p_n}} < e^M,$$

ou

$$e^{-M} \leq \frac{r_{p_n}}{\Sigma_n} \leq 1.$$

On en déduit une infinité de points $\frac{z_{p_n}(a)}{\sigma_n}$ tous situés dans une couronne circulaire, et ayant un point limite autre que o et ∞.

104. Lorsqu'on ne limite pas supérieurement la croissance, soit des Σ_n, soit des r_p, l'ensemble E peut cesser d'exister; mais cette rapidité de croissance est nécessaire, mais non pas suffisante pour la disparition de l'ensemble E.

Donnons-nous une fonction entière $f(z)$ et une suite $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$ quelconques. On peut former une suite plus rapidement croissante pour laquelle l'ensemble E existe relativement à $f(z)$.

Considérons les zéros de $f(z)$ [on pourrait aussi bien prendre ceux de $f(z) - a$] :

$$z_0, \quad z_1, \quad z_2, \ldots, \quad z_n, \quad \ldots$$

Posons

$$\Sigma_1 = \frac{z_1}{z_0}, \qquad \Sigma_2 = \frac{z_2}{z_0}, \qquad \ldots \qquad \Sigma_n = \frac{z_n}{z_0}, \qquad \ldots$$

On peut, de la suite des Σ_n, extraire une suite partielle croissant plus rapidement que la suite donnée $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$. Or, on a évidemment

$$\frac{z_n}{\Sigma_n} = z_0,$$

en particulier pour les valeurs de n qui correspondent aux Σ de la suite partielle. z_0 est donc point limite des $\frac{z_p}{\Sigma_n}$ (1), et l'ensemble E existe.

105. On peut aisément former un exemple où l'ensemble E n'existe pas; il faut pour cela s'adresser à une fonction à zéros très rares (fonction entière d'ordre nul), et à une suite très rapidement croissante (à exposant de convergence nul).

Si, pour une certaine valeur de a, l'ensemble $\frac{z_p(a)}{\sigma_n}$ n'a pas d'autre point limite que o et ∞, il n'y a qu'un nombre fini de points de l'ensemble dans une couronne γ entourant l'origine; donc à partir d'une valeur suffisamment grande de n, les $\frac{z_p(a)}{\sigma_n}$ sont tous en dehors de γ; n étant déterminé, les $\frac{z_p(a)}{\sigma_n}$ sont les points où $f_n(z)$ prend la valeur a. Il en résulte que, à partir d'une certaine valeur de n, les $f_n(z)$ ne prennent plus dans γ la valeur a.

Si ce fait se produit pour deux valeurs distinctes de a, les $f_n(z)$ formeront une famille normale dans γ, et comme c'est une couronne quelconque entourant l'origine, E se réduira aux deux points o et ∞.

M. Valiron a démontré le théorème suivant (2) :

Soit $f(z)$ une fonction entière dont les zéros vérifient la

---

(1) Le raisonnement fait au n° 102 suppose seulement qu'au voisinage du point M, il y ait une infinité de points $\frac{z_p(a)}{\sigma_n}$ correspondant à une infinité de valeurs de p et de n; ces points peuvent se trouver tous confondus en M.

(2) Valiron, *Sur les Fonctions entières d'Ordre nul et d'Ordre fini* (*Ann. Fac. Toulouse*, 3e série, t. V, 1913, p. 146).

condition

$$n[\log r_{n+1} - \log r_n] \geq \frac{1}{\omega_1}, \qquad \omega_1 < \omega, \quad n > n_0;$$

si l'on désigne par $z_n(a)$ *la* $n^{ième}$ *racine de l'équation*

$$f(z) - a = 0$$

$[z_n(0) = z_n]$, *on aura, quel que soit* a, *pourvu que* $|a| < A$,

$$|z_n(a) - z_n| < \frac{1}{|z_n|^k}, \qquad n > n_0(A).$$

ω désigne la racine comprise entre 0 et 1 de l'équation

$$\frac{\pi^2}{6} x^3 - \frac{2}{3} x^2 - x + 1 = 0.$$

K est un nombre positif.

Il résulte de ce théorème que, lorsque n croît indéfiniment, la $n^{ième}$ racine de

$$f(z) - a = 0$$

tend vers la racine de même rang de

$$f(z) = 0.$$

Prenons alors une fonction entière $f(z)$ telle que

$$\log r_{n+1} - \log r_n$$

croisse indéfiniment; par exemple, la fonction

$$f(z) = \Pi\left(1 - \frac{z}{q^{n^2}}\right), \qquad q > 1$$

dont les zéros sont

$$z_n = q^{n^2}$$

tels que

$$\log r_n = n^2 \log q, \qquad \log r_{n+1} - \log r_n = (2n+1)\log q.$$

Choisissons une suite

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \ldots, \sigma_n, \quad \ldots$$

telle que l'on ait

$$r_1 < \Sigma_1 < r_2 < \Sigma_2 < r_3 < \ldots < r_n < \Sigma_n < r_{n+1} < \ldots.$$

On aura alors

$$\log r_n < \log \Sigma_n < \log r_{n+1}$$

et l'on peut faire en sorte que $\log r_{n+1} - \log \Sigma_n$ et $\log \Sigma_n - \log r_n$ augmentent tous deux indéfiniment comme $\log r_{n+1} - \log r_n$; par exemple,

$$\log \Sigma_n = \frac{\log r_n + \log r_{n+1}}{2}, \qquad \Sigma_n = \sqrt{r_n r_{n+1}}.$$

Les quantités $\frac{z_p}{\sigma_n}$ ont pour seuls points limites o et ∞. En effet,

$$\log \left| \frac{z_p}{\sigma_n} \right| = \log \frac{r_p}{\Sigma_n} = \log r_p - \log \Sigma_n.$$

Cette différence de deux logarithmes croît indéfiniment lorsque r_p et Σ_n sont des termes consécutifs dans la suite, à plus forte raison lorsqu'ils ne le sont pas. Donc $\log \left| \frac{z_p}{\Sigma_n} \right|$ tend vers $\pm \infty$ et $\frac{z_p}{\sigma_n}$ tend vers o ou ∞.

Pour toute valeur a telle que $|a| < A$, on a l'inégalité

$$|z_p(a) - z_p| < \frac{1}{|z_p|^k},$$

d'où

$$\left| \frac{z_p(a)}{\sigma_n} - \frac{z_p}{\sigma_n} \right| < \frac{1}{|z_p|^k |\sigma_n|},$$

cette différence tend vers o; donc les $\frac{z_p(a)}{\sigma_n}$ n'ont également pour points limites que o et ∞.

Ceci étant vrai pour deux valeurs de a (et même une infinité) l'ensemble E n'existe pas.

106. Il est à peine utile de faire remarquer que lorsque l'ensemble E existe, quel que soit le domaine $\mathfrak{D}_0$ entourant un point z_0 de E, dans l'ensemble des aires $\mathfrak{D}_0\sigma_1$, $\mathfrak{D}_0\sigma_2$, ..., $\mathfrak{D}_0\sigma_n$, ..., la fonction prend toutes les valeurs sauf au plus deux valeurs exceptionnelles finies ou infinies.

La suite des nombres

$$z_0\sigma_1, \quad z_0\sigma_2, \quad \ldots, \quad z_0\sigma_n, \quad \ldots$$

fournit une approximation asymptotique d'une infinité de racines de toute équation

$$f(z) - a = 0$$

non exceptionnelle.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES

Pages.

PRÉFACE V

CHAPITRE I. — *Préliminaires.*

Propriétés générales des fonctions analytiques 1
Représentation conforme des aires planes simplement connexes 7
Fonction modulaire 14

CHAPITRE II. — *Théorèmes de M. Picard et généralisations, obtenus par application directe de la fonction modulaire.*

Théorème de M. Picard sur les fonctions entières 30
Théorèmes de MM. Landau et Carathéodory 32
Théorème de M. Schottky 39
Théorème général de M. Picard 43

CHAPITRE III. — *Les familles normales de fonctions.*

Introduction 52
Les familles normales de fonctions holomorphes 55
Les familles normales de fonctions méromorphes 80

CHAPITRE IV. — *Allure d'une fonction autour d'un point singulier essentiel isolé.*

Courbes tendant vers le point singulier 89
Courbes entourant le point singulier 92
Domaines dont la frontière passe au point singulier 94

CHAPITRE V. — *Approximation continue régulière du point singulier essentiel.*

Application des résultats précédents 102
Fonctions entières 105
Fonctions méromorphes ayant une valeur asymptotique au moins 111
Fonctions méromorphes sans valeur asymptotique 116

CHAPITRE VI. — *Approximation discontinue régulière du point singulier essentiel.*

Fonctions entières 119
Fonctions méromorphes ayant une valeur asymptotique au moins 127
Fonctions méromorphes sans valeur asymptotique 133
Autres modes réguliers d'approximation 137

CHAPITRE VII. — *Approximation discontinue irrégulière du point singulier essentiel* 142

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
Quai des Grands-Augustins, 55.
68464-23

a39001 006922689b

Librairie - Imprimerie GAUTHIER-VILLARS
55, Quai des Grands-Augustins, PARIS (6e)

Collection de Monographies sur la Théorie des fonctions

517.5 J94
JULIA G. LEÇONS SUR LES FONCTIONS UNIF
INSERT BOOK MASTER CARD FACE UP IN FRONT SLOT OF SR. PUNCH
MASTER CARD
GLOBE 90144-O
UNIVERSITY OF ARIZONA LIBRARY
SIGILLVM VNIVERSITATIS ARIZONENSIS

Leçons sur
par René Bair
Principes
Blumenthal..
Leçons sur
fonctions an
Serge Bernst
Leçons sur
Vladimir Bel
Préface de J.
Leçons sur
rentielles li
Sorbonne e
Gaston Julia
Leçons sur
des ensembl
3e édition..
Leçons sur
de Georges
Leçons sur
collaboratio
Leçons sur
Émile Bore
Leçons sur
Émile Bore
Leçons sur
polynomes,
par Mauri
2e édition,
Leçons s
Paris, par
Leçons
par Émile
Méthod
Les pr
Professeu
Leçon
mier o
Note de
Leçon
par T.
Leçon
sité de

ce,
r.
to
fr.
les
par
fr.
par
ne
fr.
ffé-
la
par
fr.
orie
REL.
fr.
Note
fr.
ec la
5 fr.
par
uisé.)
par
10 fr.
es de
ligées
ESGUE.
20 fr.
ces de
20 fr.
exe,
fr.
fr.
T.),
fr.
pre-
ne
fr.
ice,
fr.
ver-
fr.

Collection de Monographies sur la Théorie des fonctions

(suite)

Les espaces abstraits et leurs théories, par MAURICE FRÉCHET..... 200 fr.

Leçons sur les fonctions automorphes. Fonctions automorphes de n variables. Fonctions de Poincaré, par GEORGES GIRAUD..... 120 fr.

La théorie du potentiel et ses applications aux problèmes fondamentaux de la Physique mathématique, par M. M. GUNTHER, professeur à l'Université de Léningrad..... 300 fr.

Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé, professées au Collège de France par GASTON JULIA, rédigées par P. FLAMANT... 120 fr.

Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, professées au Collège de France, par HENRI LEBESGUE. 2e édition..... (*Sous presse*)

Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire, par C. DE LA VALLÉE POUSSIN..... 150 fr.

Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, professées à la Sorbonne, par C. DE LA VALLÉE POUSSIN..... 120 fr.

L'Analysis situs et la Géométrie algébrique, par S. LEFSCHETZ..... 120 fr.

Leçons d'analyse fonctionnelle, professées au Collège de France, par PAUL LÉVY, avec une *Préface* de J. HADAMARD..... (*Sous presse*)

Leçons sur les ensembles analytiques, par LUSIN..... 250 fr.

Séries de Fourier et Classes quasi analytiques de fonctions. Leçons professées à l'Institut Henri-Poincaré et à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand, par S. MANDELBROJT..... 150 fr.

Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe, par PAUL MONTEL..... 120 fr.

Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications, par P. MONTEL, recueillies et rédigées par J. BARBOTTE..... 200 fr.

Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes, professées à la Sorbonne, par PAUL MONTEL, recueillies et rédigées par F. MARTY, avec une Note de HENRI CARTAN..... 175 fr.

Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, par ROLF NEVANLINNA, Professeur à l'Université de Helsingfors..... 150 fr.

Leçons sur les séries d'interpolation, par N.-E. NÖRLUND, Professeur à l'Université de Copenhague, rédigées par RENÉ LAGRANGE..... 200 fr.

Leçons sur les équations linéaires aux différences finies, par N.-E. NÖRLUND. rédigées par RENÉ LAGRANGE..... 200 fr.

Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, par FRÉDÉRIC RIESZ..... 120 fr.

Leçons sur les nombres transfinis, par W. SIERPINSKI, Professeur à l'Université de Varsovie..... 175 fr.

Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques, professées à la Sorbonne et à l'Université de Cernauti, par S. STOÏLOW, Professeur à l'Université de Cernauti..... 200 fr.

Leçons sur la composition et les fonctions permutables, par VITO VOLTERRA. Membre de l'Institut, et JOSEPH PÉRÈS..... 120 fr.

Théorie générale des fonctionnelles, par VITO VOLTERRA, Membre de l'Institut, et JOSEPH PÉRÈS, Professeur à la Sorbonne. Tome I. *Généralités sur les fonctionnelles. Théories des équations intégrales.* Préface de VITO VOLTERRA.. 400 fr.

Opérations infinitésimales linéaires. Applications aux équations différentielles et fonctionnelles, par VITO VOLTERRA..... 250 fr.

Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique, enseignées à l'Université de Harward, par Arnaud DENJOY, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris.

Ire PARTIE : *La différentiation seconde mixte et son application aux séries trigonométriques*..... 150 fr.

IIe PARTIE : *Métrique et topologie d'ensembles parfaits et de fonctions*. 250 fr.

IIIe PARTIE : *Détermination d'une fonction continue par ses nombres dérivés seconds généralisés extrêmes finis*..... 200 fr.

127393-47. — Imp. Gauthier-Villars, 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).